Terça-feira 27 de setembro de 2011

Prova
Dia 1

Problema 1. No quadro está escrito o número 2. Ana e Bruno jogam alternadamente, começando por Ana, da seguinte maneira: cada um na sua vez substitui o número escrito pelo que se obtém multiplicando-o por 2, ou por 3, ou somando-lhe 1. O primeiro que obtenha um resultado maior ou igual a 2011 ganha. Mostre que um dos dois tem uma estratégia vencedora e descreva-a.

Problema 2. Encontrar todos os inteiros positivos n para os quais existem três números inteiros não nulos x, y, z tais que

$$x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}.$$

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo e X, Y, Z os pontos de tangência de sua circunferência inscrita com os lados BC, CA, AB, respectivamente. Sejam C_1, C_2, C_3 circunferências com cordas YZ, ZX, XY, respectivamente, de maneira que C_1 e C_2 se intersectem sobre a reta CZ e que C_1 e C_3 se intersectem sobre a reta BY. Suponha que C_1 intersecta XY em J e intersecta ZX em M; que C_2 intersecta YZ em L e intersecta XY em I; e que C_3 intersecta YZ em K e intersecta ZX em N. Demonstrar que I, J, K, L, M, N estão sobre uma mesma circunferência.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Quarta-feira 28 de setembro de 2011

Prova
Dia 2

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo e O o seu circuncentro. Sejam P e Q pontos tais que $BOAP$ e $COPQ$ são paralelogramos. Demonstrar que Q é o ortocentro de ABC.

Problema 5. Sejam $x_1, .., x_n$ números reais positivos. Demonstrar que existem $a_1, ..., a_n \in \{-1, 1\}$ tais que

$$a_1 x_1^2 + ... + a_n x_n^2 \geq (a_1 x_1 + ... + a_n x_n)^2.$$

Problema 6. Sejam $k \geq 2$ e n inteiros positivos. Temos kn caixas em linha reta e em cada caixa coloca-se uma pedra de uma de k cores diferentes de tal forma que haja n pedras de cada cor. Uma *troca* consiste em trocar de caixa duas pedras que se encontrem em caixas adjacentes. Encontrar o menor inteiro positivo m para o qual sempre é possível conseguir mediante m trocas que as n pedras de cada cor fiquem em caixas consecutivas se:
a) n é par.
b) n é ímpar e $k = 3$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos