XXIII^a OLIMPÍADA de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2017

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar calculadora; não se pode consultar livros nem anotações.
<u>Justifique cada uma das suas respostas.</u>
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 27 de maio.

PROBLEMA 1

A cada número de tres dígitos Matías somou o número que se obtém invertendo seus dígitos. Por exemplo, ao número 927 somou o 729. Calcule em quantos casos o resultado da soma de Matías é um número con todos os dígitos ímpares.

PROBLEMA 2

É possível pintar 33 casas de um tabuleiro 9×9 de forma que cada linha e cada coluna do tabuleiro tenha no máximo 4 casas pintadas, mas se além delas pintamos qualquer outra casa aparece alguma linha ou coluna com 5 casas pintadas?

PROBLEMA 3

Seja $ABCD$ um losango de lados $AB = BC = CD = DA = 13$. Sobre o lado AB se constrói o losango $BAFE$, exterior a $ABCD$ e tal que o lado AF é paralelo à diagonal BD de $ABCD$. Se a área de $BAFE$ é igual a 65, calcular a área de $ABCD$.

PROBLEMA 4

Seja n um inteiro par maior que 2. Sobre os vértices de um polígono regular de n lados podem ser colocadas fichas vermelhas ou azuis. Dois jogadores, A e B, jogam alternadamente do seguinte modo: cada jogador, na sua vez, escolhe dois vértices que não tenham fichas e coloca em um deles uma ficha vermelha e no outro uma ficha azul. O objetivo de A é conseguir que haja três vértices consecutivos com fichas da mesma cor. O objetivo de B é impedir que isto aconteça. No começo do jogo não há fichas em nenhum dos vértices.
Prove que independentemente de quem começe a jogar, o jogador B sempre poderá conseguir seu objetivo.

PROBLEMA 5

Dizemos que dois números inteiros positivos a e b formam um *par adequado* se $a+b$ divide ab (sua soma divide seu produto). Encontre 24 números inteiros positivos que possam ser distribuídos em 12 pares adequados, de modo que cada um desses números apareça em um só par e o maior dos 24 números seja o menor possível.

XXIII^a OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2017

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
Não se pode usar calculadora; não se pode consultar livros nem anotações.
<u>Justifique cada uma das suas respostas.</u>
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 27 de mayo.

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo é *ascendente* se seus dígitos lidos da esquerda para a direita estão em ordem estritamente crescente. Por exemplo, 458 é ascendente e 2339 não é.
Determine o maior número ascendente que é múltiplo de 56.

PROBLEMA 2

Varios números reais diferentes estão escritos no quadro. Se a, b, c são três destes números, dois a dois distintos, ao menos uma das somas $a+b, b+c, c+a$ também é um dos números do quadro. Qual é a maior quantidade de números que podem estar escritos no quadro?

PROBLEMA 3

Em um quadrilátero $ABCD$ se verifica que $ABC = ADC = 90^{\circ}$ e BCD é obtuso. No interior do quadrilátero se localiza o ponto P tal que $BCDP$ é un paralelogramo. A reta AP corta o lado BC em M.
Além disso, $BM = 2$, $MC = 5$ e $CD = 3$.
Determine o comprimento de AM.

PROBLEMA 4

Consideramos todos os números de 7 dígitos que se obtém permutando de todas as maneiras possíveis os dígitos de 1234567. Quantos deles são divisíveis por 7?

PROBLEMA 5

Ababa brinca com uma palabra formada pelas letras de seu nome e se colocou certas regras:
Se encontra um A seguido imediatamente por um B pode substituí-los por BAA.
Se encontra dois B's consecutivos pode apagá-los.
Se encontra três A's consecutivos pode apagá-los.
Ababa começa com a palavra ABABABAABAAB. Com as regras anteriores, quantas letras tem a palavra mais curta a que pode chegar? Por que não pode chegar a uma palavra mais curta?