Vingança Olímpica

2017

INSTRUÇÕES:

- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.

---

1. Prove que não existem inteiros positivos a, b e k tais que $4abk - a - b$ é quadrado perfeito.

2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo de circuncírculo Γ. Suponha que existam pontos R e S sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que $BR = RS = SC$. A tangente por A a Γ intersecta RS em P. Seja I o incentro do triângulo $\triangle ARS$. Prove que $PA = PI$.

3. Seja n um inteiro positivo. Dizemos que um par formado por uma permutação $\pi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ e uma coloração $C : \{1, 2, ..., n\} \to \{0, 1\}$ é vingativo se:

- $\forall$ conjunto $S_i = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), ...\}$, existe $j \in S_i$ com $C(j) = 1$; e
- se $C(k) = 1$, então k está entre os $\nu_2(|S_k|) + 1$ maiores elementos de S_k.

Sejam V a quantidade de pares vingativos e P a quantidade de partições não ordenadas de n com todas as partes sendo potências de 2. Determine $\frac{V}{P}$.

4. Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f'''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$. Prove que:

$$f(a^2 + b^2 + c^2) + 2f(ab + bc + ac) \geq f(a^2 + 2bc) + f(b^2 + 2ac) + f(c^2 + 2ab) \;\; \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$$