39ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3ª Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Os pontos X, Y e Z estão marcados nos lados AB, BC e AC do triângulo ABC, respectivamente. Os pontos A', B' e C' estão nos lados XZ, XY e YZ do triângulo XYZ, respectivamente, de modo que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$ e $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $ACC'A'$ são trapézios em que os lados do triângulo ABC são bases.

a) Determine a razão entre a área do trapézio $ABB'A'$ e a área do triângulo $A'B'X$.

b) Determine a razão entre a área do triângulo XYZ e a área do triângulo ABC.

---

2. Sabemos que o número real C e números reais não-nulos x, y e z, dois a dois distintos, satisfazem:

$$x + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = y + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = z + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C.$$

a) Mostre que $C = -1$;

b) Exiba pelo menos uma solução (x, y, z) para a equação dada.

---

3. Seja $n > 1$ um inteiro e considere um tabuleiro $n \times n$, em que algumas das n^2 casas foram pintadas de preto, e as restantes foram pintadas de branco. Prove que é possível escolhermos uma das n^2 casas do tabuleiro, de modo que, ao removermos completamente a linha e a coluna que a contém, haja um número diferente de casas pretas e de casas brancas, dentre as $(n-1)^2$ casas restantes.

39ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3ª Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

4. Na Terra dos Impas, somente os algarismos ímpares são utilizados para contar e escrever números. Assim, em vez dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . . os Impas têm os números correspondentes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, . . . (note que os números dos Impas têm somente algarismos ímpares). Por exemplo, se uma criança tem 11 anos, os Impas diriam que ela tem 31 anos.

a) Como os Impas escrevem o nosso número 20?

b) Numa escola desse lugar, a professora escreveu no quadro-negro a continha de multiplicar abaixo. Se você fosse um aluno Impa, o que escreveria como resultado?

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

c) Escreva, na linguagem dos Impas, o número que na nossa representação decimal é escrito como 2017.

---

5. No triângulo ABC, com $AB \neq AC$, seja I seu incentro. Os pontos P e Q são definidos como os pontos onde o circuncírculo do triângulo BCI intersecta novamente as retas AB e AC, respectivamente. Seja D o ponto de interseção de AI e BC.

a) Prove que P, Q e D são colineares;

b) Sendo T, diferente de P, o ponto de encontro dos circuncírculos dos triângulos PDB e QDC, prove que T está no circuncírculo do triângulo ABC.

Observação: O *Incentro* de um triângulo é o ponto de interseção de suas bissetrizes internas e o *Circuncírculo* de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus três vértices.

---

6. Demonstre que, para todo n inteiro positivo, existem inteiros positivos a e b, sem fatores primos em comum, de modo que $a^2 + 2017b^2$ possui mais de n fatores primos distintos.