39^a OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3^a Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

1. Para cada número real r entre 0 e 1 podemos representar r com decimal infinito $r = 0{,}r_1r_2r_3\ldots$ com $0 \le r_i \le 9$. Por exemplo, $\frac{1}{4} = 0{,}25000\ldots$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707106\ldots$.

a) Mostre que podemos escolher dois racionais p e q entre 0 e 1 de modo que a partir das representações decimais deles $p = 0{,}p_1p_2p_3\ldots$ e $q = 0{,}q_1q_2q_3\ldots$ é possível construir um número irracional $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ tal que para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$ temos $a_i = p_i$ ou $a_i = q_i$.

b) Mostre que existem um racional $s = 0{,}s_1s_2s_3\ldots$ e um irracional $\beta = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ tais que para todo $N \ge 2017$ o número de índices $1 \le i \le N$ tais que $s_i \ne b_i$ é menor ou igual a $\frac{N}{2017}$.

2. Seja $n \ge 3$ um inteiro. Prove que, para todo k inteiro com $1 \le k \le \binom{n}{2}$, existe um conjunto A com n elementos inteiros positivos distintos tais que o conjunto $B = \{\text{mdc}(x, y) : x, y \in A, x \ne y\}$ (obtido a partir do máximo divisor comum de todos os pares de elementos distintos de A) contém exatamente k elementos distintos.

3. Um quadrilátero $ABCD$ tem círculo inscrito ω e é tal que as semirretas AB e DC se cortam no ponto P e as semirretas AD e BC se cortam no ponto Q. As retas AC e PQ se cortam no ponto R. Seja T o ponto de ω mais próximo da reta PQ. Prove que a reta RT passa pelo incentro do triângulo PQC.

39ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3ª Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

4. Vemos, nas figuras 1 e 2 a seguir, exemplos de bloqueio de tela de um telefone celular que só funciona com uma senha que não é digitada, mas desenhada com segmentos de reta. Esses segmentos formam uma linha poligonal com vértices em um reticulado. Ao desenhar o padrão correspondente à senha, o dedo deve permanecer todo o tempo tocando a tela. Toda a linha poligonal corresponde a uma sequência de algarismos e essa sequência é que é, de fato, a senha. O traçado das poligonais obedece às regras a seguir:
i. O traçado começa por um dos pontos destacados, os quais correspondem aos algarismos de 1 a 9 (figura 3).
ii. Cada segmento do padrão deve ter como um dos seus extremos (aquele em que terminamos de traçar o segmento) um ponto que ainda não foi usado.
iii. Se um segmento liga dois pontos e contém um terceiro (o seu ponto médio), então o algarismo correspondente a esse terceiro ponto é incluído na senha. Isso não acontece quando esse ponto/algarismo já foi usado.
iv. Toda senha tem pelo menos quatro algarismos.

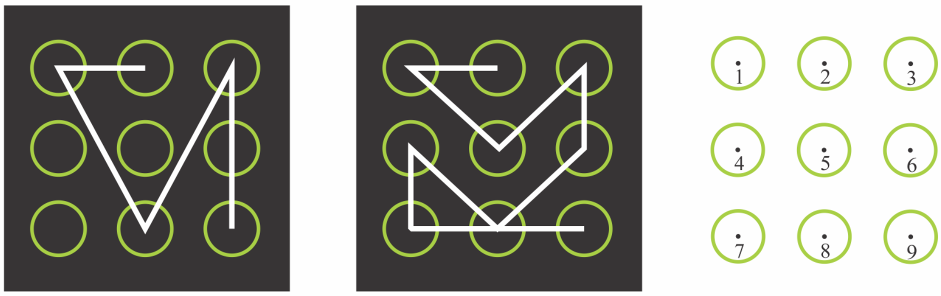

figura 1 figura 2 figura 3

Assim, toda linha poligonal é associada a uma sequência de quatro ou mais algarismos, os quais aparecem na senha na mesma ordem em que são visitados. Na figura 1 acima, por exemplo, a senha é 218369, caso o primeiro ponto visitado tenha sido o 2. Note que o segmento ligando os pontos associados aos algarismos 3 e 9 inclui o ponto associado ao algarismo 6. Se o primeiro ponto visitado fosse o 9, então a senha seria 963812. Se o primeiro ponto visitado fosse o 6, então a senha seria 693812. Note que o 6 seria pulado, já que não poderia repetir. Por outro lado, a linha poligonal da figura 2 é associada a uma única senha.
Determine o menor n ($n \geq 4$) tal que dado qualquer subconjunto de n algarismos de 1 a 9 é possível elaborar uma senha que envolva exatamente esses algarismos em alguma ordem.

---

5. No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

---

6. Seja a inteiro positivo e p um divisor primo de $a^3 - 3a + 1$ com $p \neq 3$. Prove que p é da forma $9k + 1$ ou $9k - 1$, sendo k inteiro.