I Vingança Olímpica

V Semana Olímpica, janeiro de 2002, Vila Velha – ES

Instruções:

- Não é permitido o uso de calculadoras ou qualquer instrumento de cálculo, nem consultas a apontamentos.
- Tempo de prova: 4 horas.
- A nota da prova é a soma das quatro maiores pontuações.

1. **(3 pontos)** Mostre que não existe função f tal que:
$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \text{ e } f^n(n) = n + 1 \text{ (onde } f^n \text{ é a iterada de } f\ n \text{ vezes).}$$

2. **(4 pontos)** Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. P é o encontro das diagonais e O é o circuncentro de $ABCD$. Sejam X e Y os circuncírculos dos triângulos ABO e CDO, respectivamente. Sejam M e N os pontos médios dos arcos AB (de X) e CD (de Y) que não passam por O. Prove que M, N e P são colineares.

3. **(4 pontos)** Prove que:
$$\frac{3}{2}\sqrt{(x^2+y^2)(w^2+z^2)} + \sqrt{(x^2+w^2)(y^2+z^2) - 3xyzw} \geq (x+z)(w+y).$$
sendo, x, y, z e w reais positivos.

4. **(5 pontos)** Ache todos os pares de inteiros positivos m, n tais que exista um poliedro de modo que cada vértice do poliedro é vértice de exatamente três fases poligonais regulares, uma de n lados a duas de m lados.

5. **(6 pontos)** Em uma festa do cabide, os convidados estão inicialmente com suas respectivas roupas. Em um dado instante, o anfitrião escolhe um convidado e esse convidado, junto com todos os seus amigos devem despir-se caaso estejam vestidos e colocar suas roupas caso estejam pelados. É sempre possível que em um dado instante, todos estejam nus (independente de quem seja amigo de quem)?
Observação: a amizade é uma relação recíproca.

6. **(7 pontos)** Sendo N o número de arranjos de números da forma:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

onde $a_y \in \{0; 1; 2; \ldots; p\}$ e, se $i \leq i'$ e $j \leq j'$, então $a_{ij} \leq a_{i'j'}$

Sendo p primo, determine o resto da divisão de N por p.

7. **(9 pontos)** Prove que:
$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$