II OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
2 DE OUTUBRO DE 1999

1. [4 Pontos]

Determine a soma da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-1})^k}{k}$.

2. [5 Pontos]

Os vértices do triângulo ABC pertencem à hipérbole $xy = 1$. Demonstre que seu ortocentro também pertence a essa hipérbole.

3. [5 Pontos]

Sejam $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ todas as raízes reais do polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, sendo $n > 1$. Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são todas as raízes do polinômio $g(x) = f(x) - x f'(x)$ e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são todas as raízes do polinômio $h(x) = f(x) + x f'(x)$, demonstre que essas raízes são reais e satisfazem

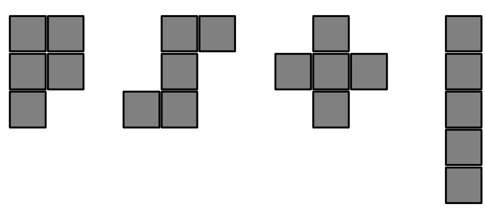
$$y_1 < 0 < z_1 < x_1 < y_2 < z_2 < x_2 < \ldots < y_n < z_n < x_n.$$

4. [6 Pontos]

A soma de dois quadrados perfeitos consecutivos pode ser um quadrado perfeito: por exemplo, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Encontre o menor inteiro $n > 2$ para o qual existem n números inteiros consecutivos tais que a soma dos seus quadrados seja um quadrado perfeito.

5.

No jogo *tetris-5* são usadas peças de quatro tipos, que são pretas de um lado e brancas no outro, que são mostradas na figura abaixo:



As peças podem ser colocadas num tabuleiro quadriculado $n \times n$ em qualquer posição, desde que não se superponham e tenham o lado preto para acima.

a) **[2 Pontos]**
Demonstre que é possível cobrir um tabuleiro 8×8 do qual foram retiradas as quatro casas dos vértices.

b) **[4 Pontos]**
Demonstre que não se pode cobrir um tabuleiro 1999×2001 do qual foram retiradas as quatro casas dos vértices.

6. [7 Pontos]
Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais, e seja $\mathbb{N}_m = \{0, 1, 2,\ldots, m-1\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Demonstrar que para qualquer função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_m$ existe um número real α tal que $[\alpha^n] \equiv f(n) \pmod m$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota: $[x]$ é o único inteiro tal que $[x] \le x < [x] + 1$.

7. [8 Pontos]
Em $\mathbb{R}^3$, define-se o produto "o" do seguinte modo:

$$(x, y, z) \text{ o } (u, v, t) = (xu + yt + zv, xv + yu + zt, xt + yv + zu).$$

Demonstrar que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, se $(x, y, z)^k = (0, 0, 0)$ então $x = y = z = 0$.

Nota: Define-se $(x, y, z)^k = (x, y, z)^{k-1}$ o (x, y, z) para qualquer inteiro $k > 1$, e $(x, y, z)^1 = (x, y, z)$.

Tempo: 5 horas.