THE 3RD ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

DIA 1: SEXTA-FEIRA, 26 DE FEVEREIRO DE 2010, BUCARESTE

Language: Portuguese

Problema 1. Para cada conjunto finito não vazio P de primos, seja $m(P)$ a maior quantidade possível de inteiros positivos consecutivos, cada um divisível por pelo menos um elemento de P.

(i) Mostre que $|P| \le m(P)$, com igualdade se, e somente se, $\min(P) > |P|$;

(ii) Mostre que $m(P) < (|P|+1)(2^{|P|}-1)$.

(O número $|P|$ é a quantidade de elementos do conjunto P.)

Problema 2. Para cada inteiro positivo n, encontre o maior real C_n com a seguinte propriedade: dadas quaisquer n funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ definidas no intervalo fechado $0 \le x \le 1$ e que assumem valores reais, é possível encontrar números $x_1, x_2, \dots, x_n$, com $0 \le x_i \le 1$, tais que

$$\left| f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n) - x_1 x_2 \cdots x_n \right| \ge C_n.$$

Problema 3. Seja $A_1A_2A_3A_4$ um quadrilátero convexo cujos lados opostos não são paralelos. Para cada $i = 1,2,3,4$, defina ω_i como o círculo que toca o quadrilátero externamente e é tangente às retas $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} e $A_{i+1}A_{i+2}$ (índices são considerados módulo 4, de modo que $A_0 = A_4$, $A_5 = A_1$ e $A_6 = A_2$). Seja T_i o ponto de tangência de ω_i com o lado A_iA_{i+1}. Prove que as retas A_1A_2, A_3A_4 e T_2T_4 são concorrentes se, e somente se, as retas A_2A_3, A_4A_1 e T_1T_3 são concorrentes.

Cada problema vale 7 pontos.
Duração da prova: $4\frac{1}{2}$ horas.

THE 3RD ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

DIA 2: SÁBADO, 27 DE FEVEREIRO DE 2010, BUCARESTE

Language: Portuguese

Problema 4. Determine se existe um polinômio $f(x_1, x_2)$ em duas variáveis, com coeficientes inteiros, e dois pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ no plano, satisfazendo todas as seguintes condições:

(i) A é um ponto inteiro (isto é, a_1 e a_2 são inteiros);

(ii) $d(A, B) = 2010$, sendo a *distância do taxista* entre dois pontos $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ no plano dada por

$$d(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|;$$

(iii) $f(n_1, n_2) > f(a_1, a_2)$, para todos os pontos inteiros (n_1, n_2) no plano diferentes de A;

(iv) $f(x_1, x_2) > f(b_1, b_2)$, para todos os pontos (x_1, x_2) no plano diferentes de B.

Problema 5. Seja n um inteiro positivo dado. Dizemos que um conjunto K de pontos no plano com coordenadas inteiras é *conexo* se para todo par de pontos $R, S \in K$ existem um inteiro positivo ℓ e uma sequência

$$R = T_0, T_1, \dots, T_\ell = S$$

de pontos em K, em que a distância entre cada T_i e T_{i+1} é 1. Para cada conjunto K nessas condições, definimos o conjunto de vetores

$$\Delta(K) = \{\overrightarrow{RS} \mid R, S \in K\}.$$

Qual é o valor máximo de $|\Delta(K)|$ quando tomamos todos os conjuntos conexos K com $2n+1$ pontos no plano com coordenadas inteiras?

Problema 6. Dado um polinômio f com coeficientes racionais e grau $d \geq 2$, definimos a sequência de conjuntos $f^0(\mathbb{Q}), f^1(\mathbb{Q}), \dots$ por $f^0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ e $f^{n+1}(\mathbb{Q}) = f(f^n(\mathbb{Q}))$ para $n \geq 0$. (Dado um conjunto S, $f(S)$ é o conjunto $\{f(x) \mid x \in S\}$.)

Seja $f^\omega(\mathbb{Q}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbb{Q})$ o conjunto de números que pertencem a todos os conjuntos $f^n(\mathbb{Q})$. Prove que o conjunto $f^\omega(\mathbb{Q})$ é finito.

Cada problema vale 7 pontos.
Duração da prova: $4\frac{1}{2}$ horas.