**III OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA**
**7 DE OUTUBRO DE 2000**

**1. [5 pontos]** Encontrar todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que sejam integráveis em qualquer $[0,x]$ se $x>0$ e $[x,0]$ se $x<0$, que satisfaçam a condição

$$xf(x)=\int_0^x f(t)\,dt,$$

para qualquer número real $x\neq 0$.

**Nota:** Para uma partição do intervalo $[a,b]$

$$a=x_0\leq t_1\leq x_1\leq t_2\leq x_2\leq\ldots\leq x_{n-1}\leq t_n\leq x_n=b$$

se define a soma integral da função $f(t)$ como $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1})$. A função $f(t)$ se denomina integrável em $[a,b]$ se existe um limite finito das somas integrais de $f(t)$ quando se refina a partição de $[a,b]$.Nesse caso,denotamos esse limite por $\int_0^x f(t)\,dt$.

**2. [6 pontos]** Sobre um número natural *n* se permite realizar as seguintes operações. O número *n* se escreve em qualquer base distinta de *n*. Depois se efetuam quaisquer permutações dos dígitos de *n* para obter novos números.
Um número primo se chama *superprimo* se como resultado de todas as operações permitidas se obtém números primos. Encontrar todos os números superprimos.

**3. [6 pontos]** Sejam *A* e *x* matrizes de reais positivos de dimensões $n\times n$ e $n\times 1$ respectivamente.
Demonstrar que se $A^2x=x$ então $Ax=x$.

**4. [6 pontos]** Suponhamos que um grupo abeliano $(A,+)$ se expressa como a união de dois conjuntos $A=B\cup C$. Para qualquer $X\subset A$ se define $\Delta X=\{x_1-x_2 | x_1,x_2\in X\}$. Demonstrar que se a interseção entre *B* e *C* não é vazia então $\Delta B=A$ ou $\Delta C=A$.

**5. [6 pontos]** Seja $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ um polinômio de grau positivo com coeficientes reais tal que $p(0)\neq 0$. Sejam $a_1+ib_1, a_2+ib_2,...,a_n+ib_n$ as raízes de $p(x)$, onde $i^2=-1$. Para cada *k* = 1, 2, ..., *n* se define a função $f_k:\mathbb{R}\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$,

$$f_k(x)=\frac{a_kx+b_k}{-b_kx+a_k},$$

onde $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ é a reta real estendida, $f\left(\frac{a_k}{b_k}\right)=\infty$ e $f_k(\infty)=-\frac{a_k}{b_k}$. Encontrar a função $g:\mathbb{R}\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ tal que

$$g(x)=f_1(f_2(\cdots f_n(x)\cdots)).$$

**6. [7 pontos]** Seja $a_1=1, a_n=1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}$ para qualquer inteiro *n* > 1. Encontrar

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\sqrt{2n}\right).$$

**7. [9 pontos]** Em um plano se move de qualquer maneira um ponto ( um porco) com velocidade não superior a 1 km/h, descrevendo uma curva contínua $\lambda:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, onde $[0,1]$ é um intervalo de tempo de um hora. Sabe-se que o porco se encontra inicialmente em um quadrado de lado de 8 km. No centro deste quadrado se encontra um demônio da Tasmânia cego que não pode saber a posição do porco, porém pode mover-se com qualquer velocidade. Encontrar um curva contínua $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ ( o caminho percorrido pelo demônio da Tasmânia) tal que em algum momento de tempo $t\in[0,1]$ se obtém a igualdade $\lambda(t)=\gamma(t)$, isto é, o demônio da Tasmânia pega o porco independente do caminho que este último escolha.

**Tempo: 5 horas**