III VINGANÇA OLÍMPICA

Belo Horizonte, 18 de Janeiro de 2004

Duração: 4h30m
Não é permitido o uso de livros, anotações ou calculadoras.
Serão consideradas apenas as quatro questões de maior pontuação.

1. **[4 pontos]** Sejam ABC um triângulo e D um ponto no interior tal que $\angle DAB = \angle DBC = \angle DCA$.
   Seja O_1, O_2, O_3 os circuncentros dos triângulos DBC, DCA, DAB respectivamente. Prove que se a área do triângulo $O_1O_2O_3$ for igual à do ABC então ABC é equilátero.

2. **[4 pontos]** Sejam a, b, c, x reais positivos. Prove que:
   $$\frac{a^{x+2}+1}{a^x bc+1}+\frac{b^{x+2}+1}{ab^x c+1}+\frac{c^{x+2}+1}{abc^x+1}\geq 3$$

3. **[5 pontos]** Sejam ABC um triângulo e T sua circunferência inscrita. Sejam P, Q, R as interseções da circunferência com BC, AC, AB respectivamente. Seja X a interseção da circunferência com AP. Sejam M e N as interseções da circunferência com BX e CX. Mostre que as retas MR, NQ, AP são concorrentes ou paralelas.

4. **[5 pontos]** Ache todas as funções $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tais que:
   $f(x^2+y)=f(x)f(x+1)+f(y)+2x^2y$ para todos $\{x,y\}\subset\mathbb{R}$.

5. **[5 pontos]** Seja $a_0=a_1=1$ e $a_{n+1}\cdot a_{n-1}=a_n\cdot(a_n+1)$ para $n > 0$. Prove que a_n é um número inteiro para todo n.

6. **[6 pontos]** Dado n natural, seja $f(n)$ o número de grafos rotulados direcionados com n vértices de modo que em cada vértice o número de arestas que chegam é igual ao número de arestas que saem e o número de arestas total do grafo é par (ou seja, divisível por 2!). defina $g(n)$ analogamente trocando "par" por "ímpar" na definição acima. Calcule $f(n) - g(n)$.

   (**Observação:** Um grafo rotulado direcionado é um par $G = (V, E)$ onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e E é um subconjunto de $V^2 \setminus \{(i, i); 0 < i < n + 1\}$).