THE 4$^{\text{th}}$ ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

DIA 1: SEXTA-FEIRA, 25 DE FEVEREIRO DE 2011, BUCARESTE

Language: Portuguese

Problema 1. Prove que existem duas funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f \circ g$ é estritamente decrescente e $g \circ f$ é estritamente crescente.

Problema 2. Determine todos os inteiros positivos n para os quais existe um polinômio $f(x)$ com coeficientes reais satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) para cada inteiro k, o número $f(k)$ é inteiro se e somente se k não é divisível por n;

(2) o grau de f é menor que n.

Problema 3. Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência ω. Uma reta variável ℓ paralela a BC intersecta os segmentos AB, AC nos pontos D, E respectivamente, e ω nos pontos K, L (com D entre K e E). A circunferência γ_1 é tangente aos segmentos KD e BD e também a ω; a circunferência γ_2 é tangente aos segmentos LE e CE e também a ω.

Determine o lugar geométrico, quando ℓ varia, do ponto de interseção entre as tangentes interiores comuns a γ_1 e γ_2.

Cada problema vale 7 pontos.
Tempo: $4\frac{1}{2}$ horas.

THE 4$^{\text{th}}$ ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

DIA 2: SÁBADO, 26 DE FEVEREIRO DE 2011, BUCARESTE

Language: Portuguese

Problema 4. Dado um inteiro positivo $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$, seja $\Omega(n) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$ o total de fatores primos de n, contados com multiplicidade. Seja também $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ (por exemplo, $\lambda(12) = \lambda(2^2 \cdot 3^1) = (-1)^{2+1} = -1$).

Prove as seguintes afirmações:

i) Existem infinitos inteiros positivos n tais que $\lambda(n) = \lambda(n+1) = +1$;

ii) Existem infinitos inteiros positivos n tais que $\lambda(n) = \lambda(n+1) = -1$.

Problema 5. Para todo $n \geq 3$, determine todas as configurações de n pontos distintos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ do plano com a seguinte propriedade: para qualquer par de pontos distintos X_i, X_j, existe uma permutação σ dos inteiros $\{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathrm{d}(X_i, X_k) = \mathrm{d}(X_j, X_{\sigma(k)})$ para todo $1 \leq k \leq n$.
($\mathrm{d}(X, Y)$ denota a distância euclidiana entre os pontos X e Y.)

Problema 6. As casas de um tabuleiro 2011×2011 são numeradas com os inteiros $1, 2, \ldots, 2011^2$, de modo que cada número é usado exatamente uma vez. Identificamos as arestas direita e esquerda e depois as arestas inferior e superior, da maneira usual a formar um toro (a superfície de uma rosquinha).

Determine o maior inteiro positivo M para o qual, independente de como numeramos as casas, sempre existem duas casas vizinhas tais que a diferença entre seus números é pelo menos M.*

Cada problema vale 7 pontos.
Tempo: $4\frac{1}{2}$ horas.

*Duas casas (x, y) e (x', y') são ditas vizinhas se $x = x'$ e $y - y' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$, ou $y = y'$ e $x - x' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$.