IV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
6 DE OUTUBRO DE 2001

1. [4 pontos] As raízes de um polinômio de grau quatro com coeficentes complexos estão localizadas nos vértices de um retângulo com lados de comprimento *a* e *b* no plano complexo. Encontrar a distância entre as raízes da segunda derivada deste polinômio.

2. [5 pontos] Uma função derivável $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaz a desigualdade $|f(x)|\geq|f'(x)|$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e para pelo menos um real x_0 esta desigualdade é estrita, quer dizer, $|f(x_0)|>|f'(x_0)|$. Demonstrar que a equação $f(x)=0$ não tem solução.

3. [5 pontos] A soma (ou diferença simétrica) dos conjuntos *A* e *B* é definida como:

$$A+B=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

Inicialmente os 1024 subconjuntos de um conjunto de 10 elementos estão escritos ciclicamente numa circunferência. Simultaneamente entre cada dois subconjuntos vizinhos escreve-se sua soma. Depois todos os conjuntos anteriores são apagados. Quais conjuntos estarão escritos na circunferência depois de repetir esta operação 2001 vezes?

4. [5 pontos] Seja $\alpha>0$ um número real. Sejam $0<x_1<x_2<x_3<\ldots$ as soluções reais da equação $x\cdot sen(x^{\alpha})=\log x$. Encontrar os valores de α para os quais $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}$ converge.

5. [6 pontos] Seja *f* uma função do intervalo [0, 1] no conjunto dos números reais tal que para quaisquer $x,y\in[0,1]$ se cumprem as seguintes condições:

a) Se $x\leq y$ então $f(x)\leq f(y)$.
b) $f(0)=0$.
c) $f(1-x)=1-f(x)$.
d) $f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{f(x)}{2}$.

Demonstrar que se *x* é racional então $f(x)$ é racional.

6. [7 pontos] Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\ldots\cos\frac{n\pi}{n}.$$

7. [8 pontos] Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua e periódica tal que a desigualdade $f(x)>0$ tem pelo menos uma solução.

a) Demonstrar que existe um inteiro $a\geq 2$ tal que o sistema infinito de desigualdades

$$f(a^k x)>0, k=0,1,2,\ldots$$

tem pelo menos uma solução.

b) Demonstrar que existe um inteiro $b\geq 2$ tal que o cardinal do conjunto de soluções do sistema infinito de desigualdades

$$f(b^k x)>0, k=0,1,2,\ldots$$

é igual ao contínuo.

Nota: Dizemos que um conjunto *X* tem cardinal igual ao contínuo se existe uma bijeção $f:X\to[0,1]$ entre *X* e o intervalo $[0,1]\subset\mathbb{R}$.

Tempo: 5 horas