5ª. OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL (alunos até 13 anos)

8 de maio de 1999

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 20 de maio.

PROBLEMA 1

São escolhidos 2 números inteiros entre 1 e 100 inclusive, tais que a diferença é 7 e o produto é múltiplo de 5. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

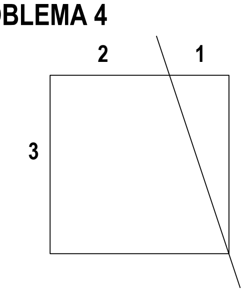
PROBLEMA 2

Num paralelogramo *ABCD*, *BD* é a diagonal maior.
Ao fazer coincidir *B* com *D* mediante uma dobra se forma um pentágono regular.
Calcular as medidas dos ângulos que forma a diagonal *BD* com cada um dos lados do paralelogramo.

PROBLEMA 3

Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã.
Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce.
Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

PROBLEMA 4



Dez cartões quadrados de 3 centímetros de lado cortam-se por uma línha, como mostra a figura.
Depois dos cortes tem-se 20 peças: 10 triângulos e 10 trapézios. Forme um quadrado que utilize as 20 peças sem superposições nem espaços.

PROBLEMA 5

Ana, Beatriz, Carlos, Diego e Emilia jogam um torneio de xadrez.
Cada jogador enfrenta uma vez só cada um dos outros quatro jogadores.
Cada jogador consegue 2 pontos se ganha a partida, 1 ponto se empata e 0 pontos se perde a partida.
Ao finalizar o torneio, as pontuações dos 5 jogadores são todas diferentes.
Encontre o máximo número de empates que pode ter tido o torneio e justifique por que não pode ter havido um número maior de empates.

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO

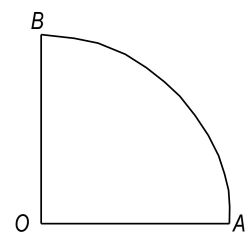
SEGUNDO NÍVEL (alunos até 15 anos)

8 de maio de 1999

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 20 de maio.

PROBLEMA 1
Um número natural de três algarismos é chamado de *tricúbico* se é igual a soma dos cubos dos seus dígitos. Encontre todos os pares de números consecutivos tais que ambos sejam *tricúbicos*.

PROBLEMA 2
A figura representa a quarta parte de um círculo de raio 1.
No arco AB, se consideram os pontos P e Q de forma tal que a reta PQ seja paralela a reta AB.
Sejam X e Y os pontos de interseção da reta PQ com as retas OA e OB respectivamente.
Calcular $\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2$.



PROBLEMA 3

A primeira fileira da tabela ao lado se preenche com os números de 1 a 10, em ordem crescente.
A segunda fileira se preenche com os números de 1 a 10, em qualquer ordem.
Em cada casa da terceira fileira se escreve a soma dos dois números escritos nas casas acima.
Existe alguma maneira de preencher a segunda fileira de modo que os algarismos das unidades dos números da terceira fileira sejam todos distintos?

PROBLEMA 4
Seja ABC um triângulo equilátero. M é o ponto médio do segmento AB e N é o ponto médio do segmento BC.
Seja P o ponto exterior a ABC tal que o triângulo ACP é isósceles e retângulo em P. PM e AN cortam-se em I. Prove que CI é a bisetriz do ângulo MCA.

PROBLEMA 5
São dados 12 pontos que são os vértices de um polígono regular de 12 lados. Rafael deve traçar segmentos que tenham seus dois extremos em dois dos pontos desenhados.
É permitido que cada ponto seja extremo de mais de um segmento e que os segmentos se cruzem, mas é proibido traçar três segmentos que sejam os três lados de um triângulo em que cada vértice é um dos 12 pontos iniciais.
Encontre o número máximo de segmentos que pode traçar Rafael e justifique por que não é possivel traçar um número maior de segmentos.