6ª. OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

13 de maio de 2000

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1
Encontre todos os números naturais de quatro algarismos formados por dois dígitos pares e dois dígitos ímpares tais que, ao multiplicá-los por 2, se obtém números de quatro algarismos com todos os seus dígitos pares e, ao dividí-los por 2, se obtém números naturais de quatro algarismos com todos os seus dígitos ímpares.

PROBLEMA 2
Seja ABC um triângulo retângulo em A, cujo cateto AC mede 1cm. A bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ corta a hipotenusa em R; a perpendicular a AR traçada por R corta o lado AB em seu ponto médio. Encontre a medida do lado AB.

PROBLEMA 3
Para escrever todos os números naturais consecutivos desde $1ab$ até $ab2$ inclusive foram utilizados $1ab1$ algarismos. Determine quantos algarismos a mais precisam-se para escrever os números naturais até o aab inclusive. Diga todas as possibilidades. (a e b representam dígitos).

PROBLEMA 4
Temos peças com forma de triângulo equilátero de lados 1; 2; 3; 4; 5 e 6 (50 peças de cada medida).
Precisa-se armar um triângulo equilátero de lado 7 utilizando algumas destas peças, sem buracos nem superposições. Qual é o menor número de peças necessárias?

PROBLEMA 5
Numa fileira temos 12 cartas que podem ser de três tipos: com as duas faces brancas, com as duas faces pretas ou com uma face branca e a outra preta.
Inicialmente temos 9 cartas com a face preta voltada para cima.
Viram-se as seis primeiras cartas da esquerda e ficam 9 cartas com a face preta voltada para cima.
Continuando, viram-se as seis cartas centrais, ficando 8 cartas com a face preta voltada para cima.
Finalmente, viram-se seis cartas: as três primeiras da esquerda e as três últimas da direita, ficando 3 cartas com a face preta voltada para cima.
Diga se com esta informação se pode saber com certeza quantas cartas de cada tipo existem na fileira.

6^a. OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

13 de maio de 2000

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1
O conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ pode ser dividido em dois subconjuntos $A = \{1, 4\}$ e $B = \{3, 2\}$ sem elementos comuns e tais que a soma dos elementos de A seja igual à soma dos elementos de B. Essa divisão é impossível para o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e também para o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Determine todos os valores de n para os quais o conjunto dos primeiros n números naturais pode ser dividido em dois subconjuntos sem elementos comuns tais que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma.

PROBLEMA 2
Num paralelogramo de área 1 são traçadas retas que unem cada vértice com o ponto médio de cada lado não adjacente a ele. As oito retas traçadas determinam um octógono no interior do paralelogramo. Calcule a área do octógono.

PROBLEMA 3
Sejam S uma circunferência de raio 2; S_1 uma circunferência de raio 1 tangente interiormente a S em B e S_2 uma circunferência de raio 1 tangente a S_1 no ponto A, mas que não é tangente a S. Se K é o ponto de interseção da reta AB com a circunferência S, demonstre que K pertence a circunferência S_2.

PROBLEMA 4
Temos um cubo de $3 \times 3 \times 3$ formado pela união de 27 cubinhos $1 \times 1 \times 1$. Retiramos alguns cubinhos de tal modo que os que permanecem seguem formando um sólido constituído por cubinhos que estão unidos pelo menos por uma face ao resto do sólido. Quando um cubinho é retirado, os que permanecem ficam no mesmo lugar em que estavam inicialmente.
Qual é o máximo número de cubinhos que podem ser retirados de modo que a área do sólido que resulte seja igual à área do cubo original?

PROBLEMA 5
Um retângulo pode ser dividido em n quadrados iguais e também pode ser dividido em $n + 98$ quadrados iguais. Se a área do retângulo é n, com n inteiro, encontre os lados do retângulo. Diga todas as possibilidades.