VII OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

12 de maio de 2001

PROBLEMA 1

Sara escreveu no quadro negro um número inteiro de menos de trinta algarismos e que termina em 2.
Célia apaga o 2 do fim e escreve-o no início.
O número que fica é igual ao dobro do número que tinha escrito Sara.
Qual é o número que Sara escreveu?

PROBLEMA 2

Vamos pegar um retângulo *ABCD* de papel; o lado *AB* mede 5 cm e o lado *BC* mede 9 cm.
Fazemos três dobras:

1- Levamos o lado *AB* sobre o lado *BC* e chamamos de *P* o ponto do lado *BC* que coincide com *A*. Forma-se então um trapézio retângulo *BCDQ*.
2- Dobramos de forma que *B* e *Q* coincidam. Forma-se um polígono de 5 lados *RPCDQ*.
3- Dobramos de novo fazendo coincidir *D* com *C* e *Q* com *P*. Forma-se um novo trapézio retângulo *RPCS*.

Após fazer estas dobras, fazemos um corte perpendicular a *SC* pelo seu ponto médio *T*, obtendo o trapézio retângulo *RUTS*.
Calcule a área da figura que aparece ao desdobrarmos o último trapézio *RUTS*.

PROBLEMA 3

Temos três caixas, uma azul, uma branca e uma vermelha, e 8 bolinhas. Cada bolinha tem um número de 1 a 8, sem repetições. Distribuímos as 8 bolinhas nas caixas, de maneira que há pelo menos duas bolinhas em cada caixa. Logo, em cada caixa, somam-se todos os números escritos nas bolinhas contidas na caixa. Os três resultados denominam-se soma azul, soma branca e soma vermelha, segundo a cor da caixa correspondente. Encontre todas as possíveis distribuições das bolinhas tais que a soma vermelha seja igual ao dobro da soma azul, e a soma vermelha menos a soma branca seja igual à soma branca menos a soma azul.

PROBLEMA 4

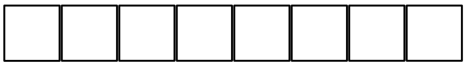
Utilizando exclusivamente números primos forma-se um conjunto com as seguintes condições:

1- Qualquer número primo de um algarismo pode estar no conjunto.
2- Para que um número primo de mais de um algarismo esteja no conjunto, devem estar no conjunto o número que se obtém ao suprimir-lhe só o primeiro algarismo e também o número que se obtém ao suprimir-lhe só o último algarismo.

Determine, entre conjuntos que cumpram estas condições, aquele que tem maior quantidade de elementos. Justifique por que não pode haver um com mais elementos.
Lembre-se de que o número 1 não é primo.

PROBLEMA 5

Num tabuleiro de 8 casas, como na figura abaixo, há inicialmente uma ficha em cada casa.
Uma jogada consiste em escolher duas fichas e mover uma delas uma casa à direita e a outra, uma casa à esquerda.
Se depois de 4 jogadas as 8 fichas estão distribuídas somente em 2 casas, determine quais podem ser estas casas e quantas fichas há em cada uma delas.



VII OLIMPÍADA DE MAIO
SEGUNDO NÍVEL

12 de maio de 2001

PROBLEMA 1

Na minha calculadora, uma das teclas de 1 a 9 está com defeito: ao pressioná-la aparece na tela um dígito entre 1 e 9 que não é o correspondente.
Quando tentei escrever o número 987654321, apareceu na tela um número divisível por 11 e que deixa resto 3 ao ser dividido por 9.
Qual é a tecla defeituosa? Qual é o número que apareceu na tela?

PROBLEMA 2

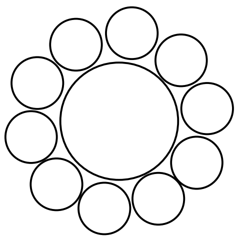
No trapézio $ABCD$, o lado DA é perpendicular às bases AB e CD. A base AB mede 45, a base CD mede 20 e o lado BC mede 65. Seja P no lado BC tal que BP mede 45 e seja M o ponto médio de DA.
Calcule a medida do segmento PM.

PROBLEMA 3

Num tabuleiro de 3 fileiras e 555 colunas, pintam-se de vermelho 3 casas, uma em cada uma das 3 fileiras.
Se escrevemos nas casas, ordenadamente por fileiras, da esquerda para a direita, os números de 1 a 1665 (na primeira fileira de 1 a 555, na segunda de 556 a 1110 e na terceira de 1111 a 1665) há 3 números que ficam escritos nas casas vermelhas.
Escrevemos nas casas, ordenadamente por colunas, de cima para baixo, os números de 1 a 1665 (na primeira coluna de 1 a 3, na segunda de 4 a 6, na terceira de 7 a 9,…, e na última de 1663 a 1665) há 3 números que ficam escritos nas casas vermelhas.
Chamamos números vermelhos aos que em alguma das duas distribuições ficam escritos nas casas vermelhas.
Diga quais são as 3 casas que devemos pintar de vermelho para que existam só 3 números vermelhos.
Mostre todas as possibilidades.

PROBLEMA 4

Em volta de um círculo situam-se dez moedas de 1 cm de raio como indicado na figura abaixo. Cada moeda é tangente ao círculo e às duas moedas vizinhas.
Demonstre que a soma das áreas das dez moedas é o dobro da área do círculo.



PROBLEMA 5

No quadro negro estão escritos os números naturais desde 1 até 2001, inclusive. Temos que apagar alguns números de modo que entre os que ficam sem apagar seja impossível escolher dois números distintos tais que o resultado de sua multiplicação seja igual a algum dos números que ficam sem apagar.
Qual é a quantidade mínima de números que devem ser apagados? Para esta quantidade, apresente um exemplo que mostre quais números são apagados. Justifique por que não obtemos a propriedade desejada se apagarmos menos números.