Ampliando Horizontes Geométricos e Encolhendo Problemas: Homotetias e Composição de Homotetias

21ª Semana Olímpica – Maceió, AL

Prof. Davi Lopes – Nível 3

1. Introdução

Sem dúvida, você já deve ter visto uma figura ampliada, quando foi assistir um filme no cinema com a rapaziada (o filme original cabe na palma da mão, mas o vemos no famoso telão), ou mesmo uma figura encolhida, quando olhamos o mapa de uma cidade ou mesmo quando olhamos um globo terrestre de madeira (de maneira inversa, vemos a cidade ou o mundo na palma da nossa mão).

Claramente, tais esquemas não nos dão o tamanho real das coisas, mas dá a ideia exata das proporções de medidas e nos dá também a mesma inclinação que a figura real. E como descreveremos essa transformação de maneira matemática? É aí que entra o conceito de homotetia! Essa transformação, apesar de ser intuitiva de se entender, nos dará resultados extremamente complexos, e é isso que estudaremos agora neste material!

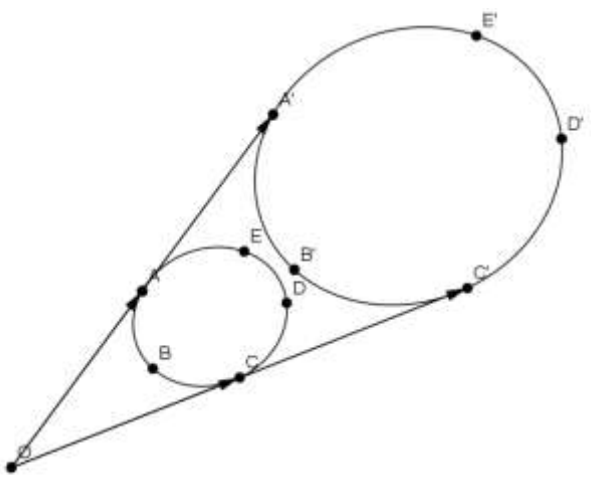
2. Definindo Homotetia

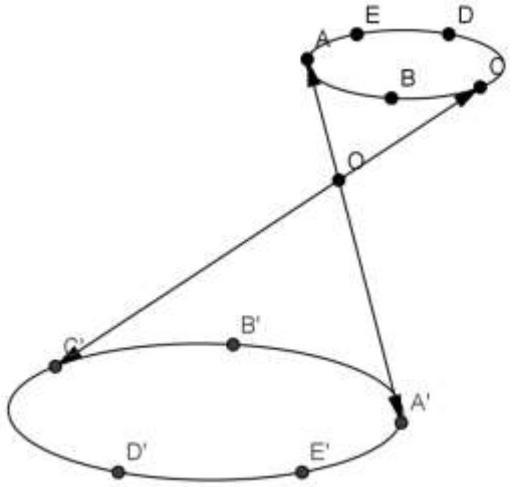
Definição de Homotetia: Dado um ponto *O* e um número real $k \neq 0$, definimos a homotetia de centro *O* e razão k, como sendo a transformação que leva um ponto *A* ao ponto *A'*, de modo que:

$$\overrightarrow{OA'} = k.\overrightarrow{OA}$$

- Notação para a homotetia de centro *O* e razão k: $H(O,k)$;
- $A' = H(A)$;

Note que podemos ter dois tipos de homotetias: a homotetia direta ($k > 0$, veja a primeira figura, abaixo) e a homotetia inversa ($k < 0$, veja a segunda figura, abaixo)





3. Propriedades da Homotetia

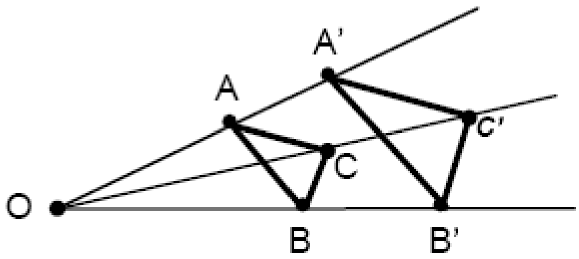
As propriedades básicas da homotetia seguem diretamente da definição vetorial. Veja só:

Propriedade 1 (Colinearidade): Se $H(O,k)$ leva A em *A'*, então *O, A, A'* são colineares. Além disso, se $H(A) = A'$, $H(B) = B'$, $H(C) = C'$, e *A*, *B*, *C* são colineares, então *A', B', C'* são colineares.

Propriedade 2 (Concorrência): Se $H(O,k)$ leva A em *A', B* em *B'* e *C* em *C'*, então *AA', BB'* e *CC'* concorrem em *O*.

Propriedade 3 (Paralelismo): Se $H(O,k)$ leva *A* em *A'* e *B* em *B'*, então $AA' \parallel BB'$.

Propriedade 4 (Semelhança): Se $H(O,k)$ leva *A* em *A', B* em *B'* e *C* em *C'*, então temos que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes e a razão de semelhança é *k*.

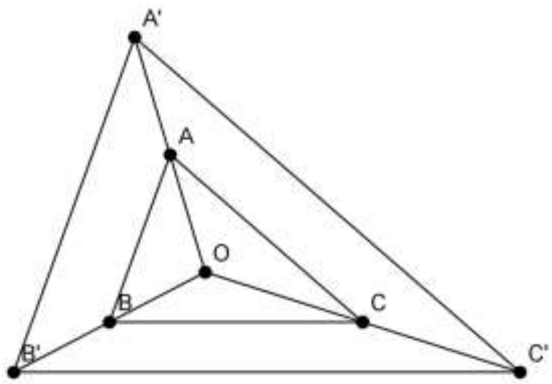


Todos esses fatos são extremamente simples de se provar, pois eles seguem diretamente da definição vetorial. Fica como exercício para o leitor prová-los.

O nosso primeiro teorema sobre homotetias é:

Teorema 1: Dois triângulos com lados homólogos paralelos são homotéticos.

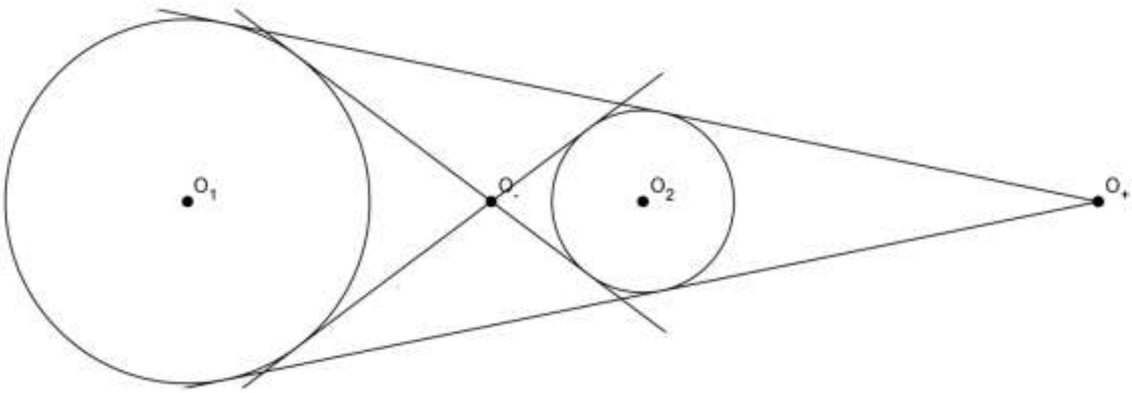
Demonstração: Sejam *ABC* e *A'B'C'* os dois triângulos com lados homólogos paralelos ($AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ e $CA \parallel C'A'$). Seja *O* a interseção de *AA'* e *BB'*. Você já deve estar suspeitando qual a homotetia que vamos considerar...



Seja $k = \frac{A'B'}{AB}$. Então, k é a razão de semelhança entre os triângulos $A'B'C'$ e *ABC*, e também entre os triângulos $OA'B'$ e *OAB*. Assim, concluímos que $B'C' = k.BC$ e $OB' = k.OB$. Como $BC \parallel B'C'$, então os triângulos OBC e $OB'C'$ são semelhantes. Então, se tomarmos uma homotetia $H(O,k)$, C é levado em um ponto P sobre a reta *B'C'* tal que $B'P = k.BC = B'C'$. Logo, $P = C'$, donde concluímos que a homotetia *H* leva *ABC* em *A'B'C'* ■

4. Homotetias com Circunferências

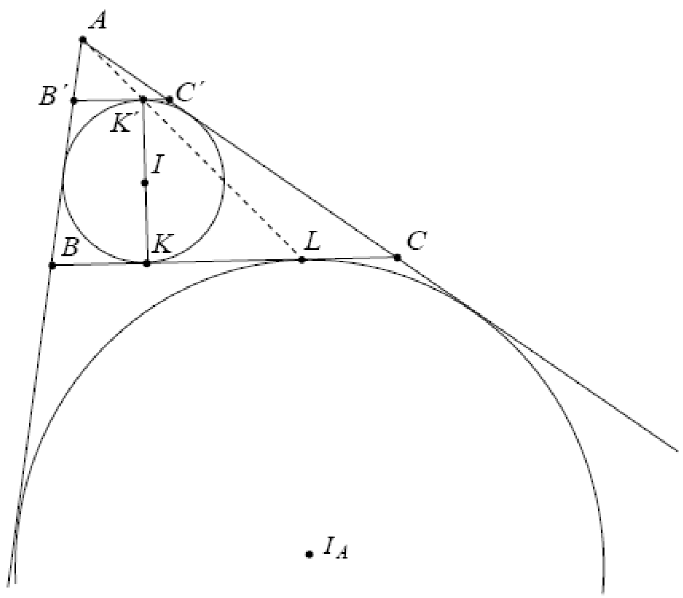
Um fato bastante simples sobre circunferências é que todas elas são semelhantes. Assim, podemos encontrar uma homotetia que leve uma circunferência qualquer em outra, ou seja, *dois círculos são sempre homotéticos*. Na maioria dos casos, eles admitem duas homotetias, uma direta e uma inversa. No caso de círculos disjuntos, os centros de homotetias são fáceis de encontrar: são as interseções das tangentes comuns internas (inversa) e das tangentes comuns externas (direta).



Outro fenômeno interessante sobre circunferências é o:

Teorema 2: Seja *ABC* um triângulo e sejam *K* e *L* os pontos de tangência do incírculo e ex-incírculo relativo a *A* em *BC*. Então *A*, *L* e o ponto *K´* diametralmente oposto a *K* no incírculo são colineares.

Demonstração:



Basta traçar a reta *B´C´* paralela a *BC* que tangencia o incírculo de *ABC* em *K´*. *ABC* e *AB´C´* são homotéticos com centro em *A*. Para terminar, o incículo de *ABC* é ex incírculo de *AB´C´*, de modo que os pontos *K´*e *L* são correspondentes na homotetia e estão, portanto, alinhados com *A*. Vale a pena lembrar também que, na figura acima, temos que *BK* = *LC* ■

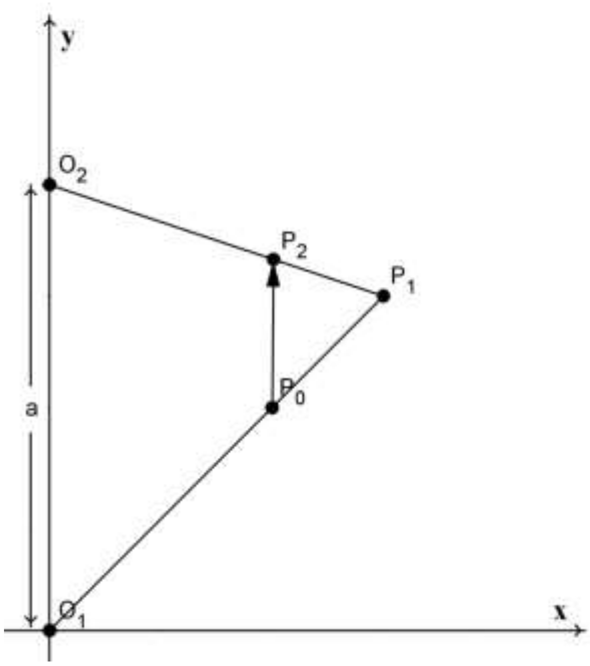
5. Composição de Homotetias – Teorema de Monge – D'Alambert

Esse teorema é, de certo modo, uma novidade no mundo olímpico, uma vez que em 2008 esse fato foi usado pela primeira vez numa IMO (O problema 6 da IMO 2008 foi considerado um dos mais difíceis dos últimos anos: Apenas 53 dos 535 olímpicos que fizeram a prova conseguiram pelo menos um ponto e somente 13 estudantes resolveram-no.). Então, há algo de novo a explorarmos sobre homotetias. E que teorema é esse?

Teorema 3 (Teorema de Monge - D'Alembert): Sejam $H_1(O_1, k_1)$ e $H_2(O_2, k_2)$ duas homotetias. Então:

- Se $k_1k_2 = 1$, então a composição $H = H_1 \ o \ H_2$ é uma translação;
- Se $k_1k_2 \neq 1$, então a composição $H = H_1 \ o \ H_2$ é uma homotetia de centro O e razão k_1k_2, e além disso, O, O_1, O_2 são colineares;

Demonstração: Vamos analisar primeiro o caso em que $k_1k_2 = 1$. Tomemos um eixo cartesiano em que $O_1 = (0,0)$, $O_2 = (0, a)$, e consideremos um ponto qualquer P_0, onde $P_1 = H_1(P_0)$ e $P_2 = H_2(P_1)$. Então $P_2 = H(P_0)$.

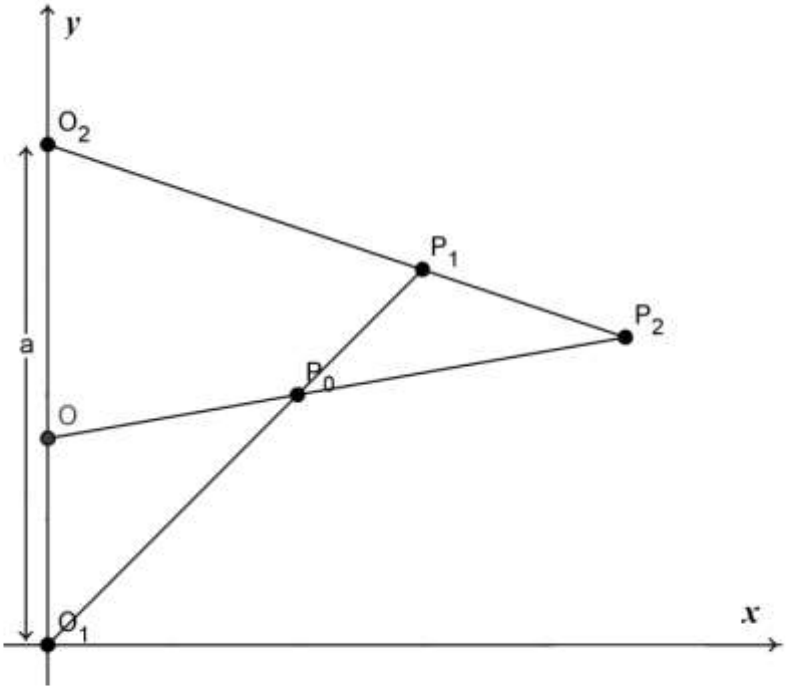


Como $k_2 = \frac{1}{k_1}$, então $P_0P_2 \parallel O_1O_2$, de modo que os triângulos $O_1P_1O_2$ e $P_0P_1P_2$ são semelhantes. Assim:

$$\frac{\overrightarrow{P_0P_2}}{\overrightarrow{O_1O_2}} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\overrightarrow{O_1P_1}} = \frac{\overrightarrow{O_1P_1} - \overrightarrow{O_1P_0}}{\overrightarrow{O_1P_1}} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P_2} = \left(\frac{k-1}{k}\right) . \overrightarrow{O_1O_2}$$

E como $\overrightarrow{O_1O_2}$ é fixo, então $\overrightarrow{P_0P_2}$ é sempre fixo, o que indica que P_2 é uma translação de P_0, como queríamos provar.

Resta, pois, demonstrar o teorema para o caso em que $k_1k_2 \neq 1$.



Vamos achar as coordenadas de $P_1 = (x_1, x_2)$ e de $P_2 = (x_2, y_2)$ em função de a e de $P_0 = (x_0, y_0)$.

i) Como $P_1 = H_1(P_0)$, então: $\overrightarrow{O_1P_1} = k_1.\overrightarrow{O_1P_0} \Rightarrow (x_1 - 0, y_1 - 0) = \big(k_1(x_0 - 0), k_1(y_0 - 0)\big) \Rightarrow (x_1, y_1) = (k_1x_0, k_1y_0)$ (1)

ii) Como $P_2 = H_2(P_1)$, então: $\overrightarrow{O_2P_1} = k_2.\overrightarrow{O_2P_0} \Rightarrow (x_2 - 0, y_2 - a) = \big(k_2(x_1 - 0),\ k_2(y_1 - a)\big) \overset{(1)}{\Rightarrow} (x_2, y_2 - a) = (k_1k_2x_0, k_1k_2y_0 - ak_2) \Rightarrow (x_2, y_2) = (k_1k_2x_0, k_1k_2y_0 + a(1 - k_2))$ (2)

iii) Afirmamos que o ponto

$$O = \left(0, \frac{a(k_2 - 1)}{k_1k_2 - 1}\right)$$

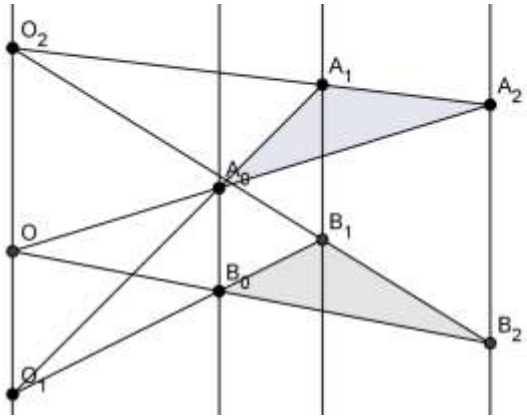
é tal que $\overrightarrow{OP_2} = k.\overrightarrow{OP_0}$, para todo P_0, onde $k = k_1k_2$. Se demonstrarmos esse fato, temos que $H = H_1\ o\ H_2$ é uma homotetia de centro O e razão k, e a colinearidade dos centros de homotetias segue do fato de que todos os três centros estão sobre o eixo y. Então vamos às contas!

- $\overrightarrow{OP_2} = (x_2 - 0, y_2 - \frac{a(k_2-1)}{k_1k_2-1}) \overset{(2)}{\Rightarrow} \overrightarrow{OP_2} = (k_1k_2x_0, k_1k_2y_0 + a(1 - k_2) - \frac{a(k_2-1)}{k_1k_2-1}) = (k_1k_2x_0, k_1k_2y_0 + k_1k_2\left(\frac{a(1-k_2)}{k_1k_2-1}\right)) \Rightarrow \overrightarrow{OP_2} = k_1k_2(x_0, y_0 + \frac{a(1-k_2)}{k_1k_2-1})$ $(*)$
- $\overrightarrow{OP_0} = \left(x_0 - 0, y_0 - \frac{a(k_2-1)}{k_1k_2-1}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OP_0} = \left(x_0, y_0 + \frac{a(1-k_2)}{k_1k_2-1}\right)$ $(**)$

De $(*)$ e $(**)$, temos que $\overrightarrow{OP_2} = k.\overrightarrow{OP_0}$, como queríamos provar ■

Podemos também demonstrar o teorema de Monge usando geometria sintética. Veja:

2ª Demonstração:



Na figura acima, temos que $B_1 = H_1(B_0)$, $B_2 = H_2(B_1)$, $A_1 = H_1(A_0)$ e $A_2 = H_2(A_1)$. Sejam $\{O_1\} = \overleftrightarrow{B_0B_1} \cap \overleftrightarrow{A_0A_1}, \{O_2\} = \overleftrightarrow{B_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_1A_2}, \{O\} = \overleftrightarrow{B_0B_2} \cap \overleftrightarrow{A_0A_2}$. Claramente, devido às homotetias H_1 e H_2, $\overleftrightarrow{A_0B_0} \parallel \overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2}$. Portanto, pra provarmos que H é uma homotetia, vamos provar primeiro que O_1, O_2, O são colineares.

Imaginemos que estejamos no espaço, e lá temos as três retas paralelas $\overleftrightarrow{A_0B_0}$, $\overleftrightarrow{A_1B_1}$, $\overleftrightarrow{A_2B_2}$. Elas formam um prisma "infinito". Agora, podemos considerar os triângulos $A_0A_1A_2$ e $B_0B_1B_2$ como sendo interseções de dois planos α e β com o nosso prisma. Claramente, α e β se intersectam numa reta r.

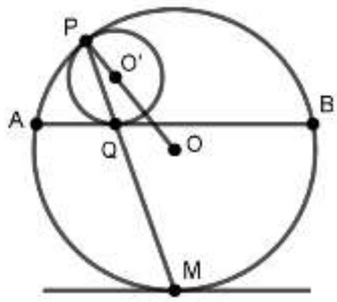
Então, os pontos O_1, O_2, O estão todos sobre a reta r. Daí, projetarmos nossa figura espacial no plano, obtemos exatamente a figura acima, e como uma reta se projeta numa reta, então os três pontos O_1, O_2, O são colineares.

Claramente, H é uma homotetia, pois A_0 é levado em A_2, B_0 é levado em B_2 e $A_0B_0 \parallel A_2B_2$, para quaisquer pontos A_0 e B_0 ■

6. Alguns Exemplos

Exemplo 1 (Lema da Estrela da Morte): Seja Ω uma circunferência, e sejam A e B dois pontos sobre Ω. Seja ω uma circunferência variável, que é tangente internamente a Ω em P, tangente ao segmento AB em Q e que varia sobre um dos arcos AB de Ω. Prove que, ao variarmos ω, a reta PQ passa por um ponto fixo.

Solução:



Sejam r e R os raios de ω e Ω, respectivamente. A homotetia de razão positiva que leva ω em Ω tem centro P', tal que $\overrightarrow{P'O'} = \left(\frac{R}{r}\right)\overrightarrow{P'O}$. Como $\overrightarrow{PO'} = \left(\frac{R}{r}\right)\overrightarrow{PO}$, temos que $P' = P$. Em geral, o centro da homotetia que leva uma circunferência em outra tangente a ela é o ponto é o próprio ponto de tangência (lembre-se desse fato, pois você vai usá-lo várias vezes no futuro!)

Assim, a imagem homotética da tangente a ω por Q (que é AB) é uma tangente a Ω, paralela a AB, ou seja, é a tangente que passa pelo ponto médio M do arco AB, como na figura. Assim, PQ passa por M, que é um ponto fixo ■

O próximo exemplo apareceu em nossa olimpíada nacional, e é um forte exemplo de como o tratamento vetorial da homotetia pode gerar belos resultados e soluções.

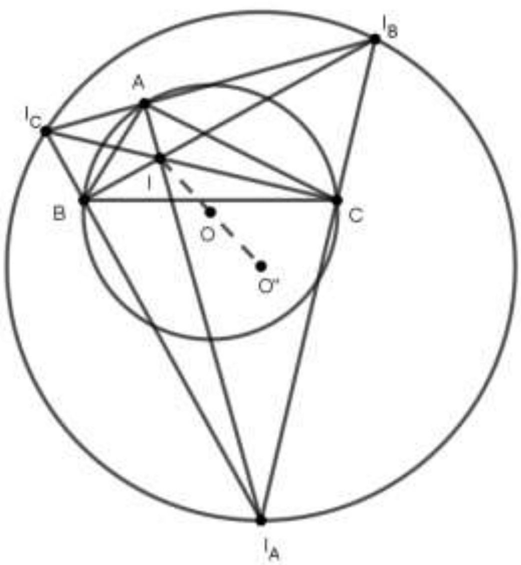
Exemplo 2: No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

Solução: Sejam M_A, M_B, M_C os pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente, I_A, I_B, I_C são os excentros relativos aos vértices A, B, C, respectivamente. Sejam ainda O e G o circuncentro e o baricentro de ABC, respectivamente.

Considere a homotetia $\mathcal{H}$, de centro G e razão -2. Tal homotetia leva o triângulo $M_AM_BM_C$ no triângulo ABC (veja o exercício 1). Dessa forma, como $r_A \perp AI$ e r_A passa por M_A, temos que $\mathcal{H}(r_A)$ é uma reta paralela a r_A (o que implica $\mathcal{H}(r_A) \perp AI$) passando por $\mathcal{H}(M_A) = A$, isto é, $\mathcal{H}(r_A)$ é a perpendicular, por A, à bissetriz interna de A. Isso significa que $\mathcal{H}(r_A)$ é a bissetriz externa relativa ao vértice A.

Analogamente, $\mathcal{H}(r_B)$ e $\mathcal{H}(r_C)$ são as bissetrizes externas relativas a B e C, respectivamente. Logo, o triângulo formado por r_A, r_B, r_C é levado, por $\mathcal{H}$, no triângulo formado pelas bissetrizes externas de A, B, C, ou seja, o triângulo $I_AI_BI_C$ (estamos usando o fato de que duas bissetrizes externas e a bissetriz interna relativa ao terceiro vértice concorrem no excentro relativo ao terceiro vértice). Portanto, se O' é o circuncentro do triângulo formado por r_A, r_B, r_C e $O'' = \mathcal{H}(O')$ é o circuncentro de $I_AI_BI_C$, temos que, da definição vetorial da homotetia $\mathcal{H}$ (e é aí que os vetores começam a fazer a mágica!):

$$\overrightarrow{GO''} = -2\overrightarrow{GO'} \Rightarrow O'' - G = -2(O' - G) \Rightarrow O' = \frac{3G - O''}{2} \quad (*)$$



Para terminar o problema, precisamos calcular, vetorialmente, o valor de $3G - O''$ em função de H e I. Com efeito, note que ABC é o ortocentro de $I_A I_B I_C$ (pois as bissetrizes interna e externa são perpendiculares), donde I é o ortocentro de $I_A I_B I_C$ e o circuncírculo O de ABC é o centro do círculo de Euler de $I_A I_B I_C$ (veja o exercício 2). Como O'' é o circuncírculo de $I_A I_B I_C$, temos:

$$O = \frac{O'' + I}{2} \Rightarrow O'' = 2O - I \ (**)$$

Por fim, sabemos que (Reta de Euler) H, G, O são colineares e:

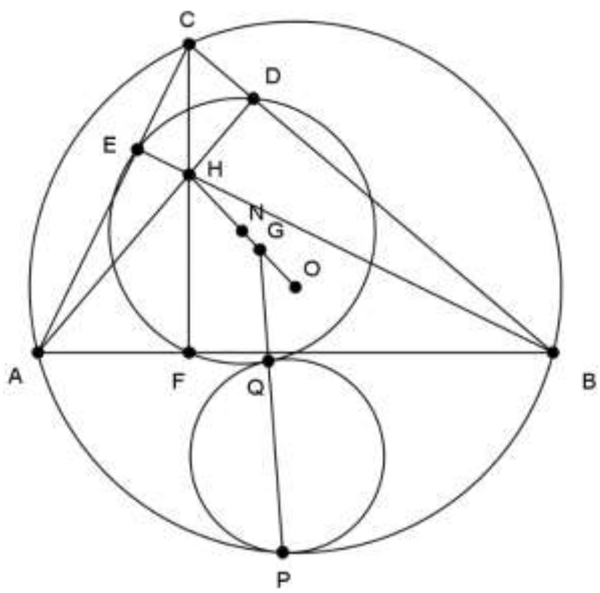
$$\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO} \Rightarrow G - H = 2(O - G) \Rightarrow 3G = H + 2O \ (***)$$

Fazendo $(***) - (**)$, temos $3G - O'' = H + I$, donde $O' = \frac{H+I}{2}$, donde o circuncentro em questão é o ponto médio de HI ■

No exemplo abaixo, veremos como aplicar o Teorema de Monge D'Alambert para provar que uma determinada reta passa por um certo ponto. O segredo para se fazer isso é identificar tal ponto, que nesse tipo de problema costuma ser o centro de uma homotetia.

Exemplo 3: Seja *ABC* um triângulo acutângulo de circuncentro *O* e sejam *D*, *E*, *F* os pés das alturas sobre os lados *BC*, *CA*, *AB*, respectivamente. Seja ω o circuncírculo de *ABC*, seja ω' o circuncírculo de *DEF* e seja *P* um ponto variável sobre ω. Considere uma circunferência tangente internamente a ω por *P* e tangente externamente a ω' em *Q*. Prove que a reta *PQ* passa por um ponto fixo sobre a reta *HO*.

Solução: Primeiro, seja *N* o circuncentro do triângulo *DEF*. Sabemos que ω' é o círculo dos nove pontos do triângulo *ABC*, donde *H*,*N*,*O* são colineares.



Seja *G* o centro da homotetia de razão negativa que leva ω' em ω. Pode-se provar que *G,* na verdade, é o baricentro do triângulo *ABC*: basta ver que o raio de ω' é a metade do raio de ω, e que *G* está entre *N* e *O*, donde $GO = 2NG$, e como $HN = NO$, teremos $HG = 2GO$, donde G é o baricentro, pela reta de Euler.

Se ω'' é a circunferência tangente internamente a ω em P e tangente externamente a ω' em Q, temos que:

- Q é o centro da homotetia de razão negativa que leva ω' em ω'';
- P é o centro da homotetia de razão positiva que leva ω'' em ω

Daí, pelo teorema de Monge-D'Alambert, o centro da homotetia de razão negativa que leva ω' em ω está na reta PQ. Como G é esse centro de homotetia, H, G, O são colineares e G é um ponto fixo (pois é o baricentro do triângulo), segue o resultado ∎

Por fim, o último exemplo é mais uma aplicação de Monge D'Alambert. Veremos que uma maneira bem efetiva de provar que três retas concorrem é provar que tais retas passam por um ponto comum e que ao mesmo tempo é o centro de uma determinada homotetia.

Exemplo 4 (Japão/2007): Seja Γ o circuncírculo do triângulo ABC. Denote Γ_A a circunferência tangente a AB, AC e internamente a Γ em P_A. Defina P_B e P_C de modo análogo. Mostre que AP_A, BP_B, CP_C são concorrentes.

Solução: Seja ω o incírculo de ABC e P o centro da homotetia de razão positiva, que leva ω em Γ. Agora, veja que:

- A é o centro da homotetia de razão positiva (e maior que 1) que leva ω em Γ_A;
- P_A é o centro da homotetia de razão positiva (e maior que 1) que leva Γ_A em Γ.

Como o produto dessas razões de homotetias é maior que 1 (portanto diferente de 1), temos que a composição de tais homotetias, que é a homotetia de razão positiva que leva ω em Γ, é uma homotetia cujo centro P está em AP_A. Logo, AP_A passa por P. Analogamente, BP_B e CP_C passam por P, donde AP_A, BP_B e CP_C concorrem em P ∎

Agora estamos prontos para encarar a lista de exercícios abaixo, recheada de questões homotéticas para ampliar nossos horizontes geométricos. Divirta-se!

7. Exercícios

01. Prove que as medianas de um triângulo ABC são concorrentes num ponto que as divide na razão $2:1$ (tal ponto é o baricentro de ABC).
02. Prove que o circuncentro O, o baricentro G e o ortocentro H de um ABC são colineares. Em seguida, prove que HG = 2 GO. Depois, prove que o centro do Círculo de Euler (círculo que passa pelos pontos médios e pelos pés das alturas de um trângulo) é o ponto médio de OH.
03. (a) (Ponto de Nagel) Seja *ABC* um triângulo. O ex-círculo de *ABC* relativo a *A* tangencia BC em *D*. Defina *E* em *AC* e *F* em *AB* de maneira análoga. Prove que *AD*, *BE*, *CF* são concorrentes em um ponto *N*, chamado *ponto de Nagel de ABC*.
    (b) Seja G o baricentro de *ABC* e I o encentro de *ABC*. Mostre que I, G, N estão, nessa ordem, em uma reta (chamada de *reta de Nagel*) e $GN = 2IG$.
04. Quatro círculos familiares no plano de um triângulo escaleno são o incírculo, o circuncírculo, o círculo de Euler e o círculo de Spieker (É o círculo que passa pelos pontos médios dos lados de um triângulo). Sejam I, O, E, S seus respectivos centros. Prove que as retas IO e ES são paralelas.
05. Dois círculos são tangentes internamente no ponto A. Uma secante intersecta os círculos em M, N, P e Q (nessa ordem). Prove que $\angle MAP = \angle NAQ$.

06. (Treinamento Brasil/1999) Sejam I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC. Sejam A', B', C' os pontos de tangência do incírculo I com os lados BC, CA, AB. Seja H o ortocentro de ABC . Prove que I, O e H são colineares.
07. Seja F o ponto médio da altura CH relativa ao lado AB de ponto médio E do triângulo ABC. Q e P são pontos sobre os lados AC e BC tais que QP//AB. R é a projeção de Q sobre AB. S é a interseção de EF e PR. Prove: S é o ponto médio de PR.
08. (IMO/1981) Três círculos de raio t (iguais) passam por um ponto T, são internos a um triângulo ABC e tangentes a dois desses lados (cada um). Prove que $t = \frac{R+r}{Rr}$ (R é o circunraio de ABC e r é o inraio de ABC) e que T pertence ao segmento unindo os centros do circuncírculo e do incírculo do triângulo ABC.
09. (IMO/1982) Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo escaleno com lados a_1, a_2 e a_3 (a_i é o lado oposto a A_i). Seja M_i o ponto médio do lado a_i e T_i o ponto onde o incírculo do triângulo toca o lado a_i, para i = 1, 2, 3. Seja S_i o simétrico de T_i em relação à bissetriz interna do ângulo A_i. Prove que as retas M_1S_1, M_2S_2 e M_3S_3 são concorrentes.
10. (IMO/1983) Seja A um dos dois pontos de interseção dos círculos C_1 e C_2, de centros O_1 e O_2, respectivamente. Uma das tangentes comuns aos círculos toca C_1 em P_1 e C_2 em P_2, e a outra toca C_1 em Q_1 e C_2 em Q_2. Seja M_1 o ponto médio de P_1Q_1 e M_2 o ponto médio de P_2Q_2. Prove que $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.
11. (Teste IMO - Brasil/2008) As diagonais do trapézio $ABCD$ cortam-se no ponto P. O ponto Q está na região determinada pelas retas paralelas BC e AD tal que $\angle AQD = \angle CQB$ e a reta CD corta o segmento PQ. Prove que $\angle BQP = \angle DAQ$.
12. (OBM/2012): Dado um triângulo ABC, o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de $\angle B$ e $\angle C$. Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A, B e C, respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de I_BI_C, I_CI_A e I_AI_B, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente.
13. (IMO/2008) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos lados BA e BC têm comprimentos diferentes. Sejam w_1 e w_2 as circunferências inscritas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente. Suponhamos que existe um circunferência w tangente à reta BA de forma que A está entre B e o ponto de tangência, tangente à reta BC de forma que C está entre B e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas AD e CD. Prove que as tangentes comuns exteriores a w_1 e w_2 se intersectam sobre w.
14. (Banco IMO/2007) O ponto P pertence ao lado AB do quadrilátero convexo $ABCD$. Seja w o incírculo do triângulo DPD e I o seu incentro. Suponha que w é tangente aos incírculos dos triângulos APD e BPC em K e L, respectivamente. As retas AC e BD se encontram em E e as retas AK e BL se encontram em F. Prove que os pontos E, I e F são colineares.
15. (Romênia) Seja ABC um triângulo e w_a, w_b, w_c círculos dentro de ABC tangentes exteriormente dois a dois, tais que w_a é tangente a AB e AC, w_b é tangente a AB e BC e w_c é tangente a AC e BC. Sejam D o ponto de tangência entre w_b e w_c, E o ponto de tangência entre w_a e w_c e F o ponto de tangência entre w_a e w_b. Prove que as retas AD, BE e CF têm um ponto em comum.
16. Seja Γ uma circunferência e A, B e C pontos em seu interior. Construa as seguintes três circunferências: Γ_1 tangente a Γ, AB e AC; Γ_2 tangente a Γ, AB e BC; Γ_3 tangente a Γ, AC e BC. Sendo C_1, C_2 e C_3 os respectivos pontos de tangência de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ com Γ, prove que AC_1, BC_2 e CC_3 passam por um mesmo ponto.

17. Sejam w e Ω o incírculo e o circuncírculo do triângulo ABC. w toca BC, CA e AB em D, E e F respectivamente. Os três círculos w_a, w_b e w_c tangenciam w em D, E e F, respectivamente, e Ω em K, L e M, respectivamente.
    (a) Prove que DK, EL e FM têm um ponto P em comum.
    (b) Prove que o ortocentro do triângulo DEF pertence à reta OP.
18. (IMO/1992) No plano, seja C uma circunferência, l uma reta tangente à circunferência C, e M um ponto sobre l. Determine o lugar geométrico de todos os pontos P com a seguinte propriedade: existem dois pontos Q, R em l, tais que M é o ponto médio de QR e C é a circunferência inscrita do triângulo PQR.
19. (USAMO/1999) Seja $ABCD$ um trapézio isósceles, com $AB \parallel CD$.A circunferência inscrita ω do triângulo BCD tangencia CD em E. Seja F um ponto na bissetriz interna de $\angle DAC$ tal que $EF \perp CD$. A circunferência circunscrita do triângulo ACF intersecta a reta CD em C e G. Prove que o triângulo AFG é isósceles.
20. (Banco IMO/2005) Seja ABC um triângulo de incentro I e tal que $AB + BC = 3AC$. O incírculo de ABC tangencia AB e BC em D e E, respectivamente. Sejam K e L os simétricos de D e E com respeito a I. Prove que o quadrilátero $ACKL$ é cíclico.
21. Dois círculos fixados são tangentes internamente em A. Seja PQ uma corda variável do círculo maior que tangencia o círculo menor. Prove que o lugar geométrico dos incentros dos triângulos APQ é um círculo que tangencia os dois círculos iniciais em A.
22. (Rioplatense/2015) Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno, de incentro I, circuncentro O e inraio r. Seja ω a circunferência inscrita do triângulo ABC. A_1 é o ponto de ω tal que AIA_1O é um trapézio convexo de bases AO e IA_1. Seja ω_1 a circunferência de raio r que passa por A_1, é tangente à reta AB e é diferente de ω. Seja ω_2 a circunferência de raio r que passa por A_1, é tangente à reta AC e é diferente de ω. As circunferências ω_1 e ω_2 se cortam nos pontos A_1 e A_2. Defina os pontos B_2 e C_2 de maneira análoga. Mostre que as retas AA_2, BB_2 e CC_2 são concorrentes.
23. (OBM/2014) Seja ABC um triângulo com encentro I e incírculo ω. A circunferência ω_A é tangente externamente a ω e tangente aos lados AB e AC em A_1 e A_2, respectivamente. Seja r_A a reta A_1A_2. Defina r_B e r_C de maneira similar. As retas r_A, r_B, r_C definem um triângulo XYZ. Prove que o encentro de XYZ o circuncentro de XYZ e I são colineares.
24. (Teste IMO – EUA/2011) Num triângulo acutângulo e escaleno ABC, os pontos D, E, F são os pés das alturas nos lados BC, CA, AB, respectivamente, e H é o ortocentro de ABC. Os pontos P e Q estão no segmento EF, de modo que $AP \perp EF$e $HQ \perp EF$. As retas DP e QH se intersectam em R. Calcule HQ/HR.
25. (USAMO/2001) Seja ABC um triângulo e seja ω seu incírculo. Denote por D_1 e E_1 os pontos onde ω é tangente aos lados BC e AC, respectivamente. Denote por D_2 e E_2 os pontos nos lados BC e AC, respectivamente, tais que $CD_2 = BD_1$ e $CE_2 = AE_1$, e denote por P o ponto de interseção dos segmentos AD_2 e BE_2. ω intersecta o segmento AD_2 em dois pontos, sendo Q o mais próximo do vértice A. Prove que $AQ = D_2P$.
26. (Torneio das Cidades/2003) O triângulo ABC tem ortocentro H, incentro I e circuncentro O. Seja K o ponto onde o incírculo toca BC. Se $IO \parallel BC$, prove que AO é paralelo a HK.
27. (Teste IMO – Romênia/2013) Os vértices de dois triângulos acutângulo estão numa mesma circunferência. O círculo de Euler de um dos triângulos passa pelos pontos médios de dois lados do outro triângulo. Prove que os triângulos possuem a mesma reta de Euler.
28. (Banco IMO/2011) Seja ABC um triângulo com incentro I e circuncírculo ω. Sejam D, E os segundos pontos de interseção de ω com AI e BI, respectivamente. A corda DE intersecta AC em F, e BC em G. Seja P o ponto de interseção da reta por F e paralela a AD com a reta por G e paralela a BE. Suponha que as tangentes a ω por A e B se intersectam em K. Prove que as retas AE, BD, KP são paralelas ou concorrentes.
29. (Banco IMO/2006) Em um triângulo ABC, sejam M_a, M_b, M_c, respectivamente, os pontos médios de BC, CA, AB. Sejam T_a, T_b, T_c, respectivamente, os pontos médios dos arcos

BC, CA, AB do circuncírculo de ABCque não contém os vértices opostos de ABC. Para $i \in \{a, b, c\}$, seja ω_i o círculo tendo M_iT_i como diâmetro. Seja ainda p_i a tangente externa comum a ω_j, ω_k ($\{i, j, k] = \{a, b, c\}$), tal que ω_i está em um lado e ω_j, ω_k em outro lado em relação a p_i. Prove que as retas p_a, p_b, p_c formam um triângulo semelhante a ABC e determine a razão de semelhança.

30. (Teste IMO – China/2014) Seja ABC um triângulo de circuncentro O. H_A é a projeção de A em BC. A reta AO intersecta o circuncírculo de BOC novamente em A'. As projeções de A' em AB e AC são D e E, respectivamente, e O_A é o circuncentro do triângulo DH_AE. Defina H_B, O_B, H_C, O_C de maneira similar. Prove que H_AO_A, H_BO_B e H_CO_C são concorrentes.
31. (RMM/2016) Um hexágono convexo $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ está inscrito em uma circunferência Ω de raio R. As diagonais A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 são concorrentes em X. Para $i = 1,2,3$, seja ω_i a circunferência tangente a XA_i, XB_i e tangente internamente ao arco A_iB_i de Ω que não contém os outros vértices do hexágono; seja r_i o raio de ω_i.

    (a) Prove que $R \geq r_1 + r_2 + r_3$

    (b) Se $R = r_1 + r_2 + r_3$, prove que os seis pontos de tangência das circunferências ω_i com as diagonais A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 são concíclicos.
32. (Teste IMO – Irã/2009) No triângulo ABC, de incentro I, sejam D, E, F os pontos de tangência do incírculo de ABC com BC, CA, AB, respectivamente. Seja M o pé da perpendicular de D para EF. P é um ponto sobre DM tal que $DP = MP$. Se H é o ortocentro de BIC, prove que PH bissecta EF.
33. (RMM/2010) Seja $A_1A_2A_3A_4$ um quadrilátero sem pares de lados paralelos. Para cada $i = 1,2,3,4$, defina ω_i como sendo o círculo tangenciando o quadrilátero externamente, e que é tangente às retas $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} e $A_{i+1}A_{i+2}$ (índices são considerados módulo 4). Seja T_i o ponto de tangência de ω_i com o lado A_iA_{i+1}. Prove que as retas A_1A_2, A_3A_4, T_2T_4 são concorrentes se, e somente se, as retas A_2A_3, A_4A_1, T_1T_3 são concorrentes.
34. (RMM/2012) Seja ABC um triângulo de encentro I e circuncentro O. Seja ω_A a circunferência passando por B e C, tangente ao incírculo de ABC; defina ω_B e ω_C de maneira análoga. As circunferências ω_B e ω_C se intersecta em $A' \neq A$; defina B' e C' de maneira análoga. Prove que AA', BB', CC' são concorrentes em um ponto na reta IO.
35. (OBM/2017) Um quadrilátero $ABCD$ tem círculo inscrito ω e é tal que as semirretas AB e DC se cortam no ponto P e as semirretas AD e BC se cortam no ponto Q. As retas AC e PQ se cortam no ponto R. Seja T o ponto de ω mais próximo da reta PQ. Prove que a reta RT passa pelo incentro do triângulo PQC.