Provas da OMCPLP2016

6ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Primeiro dia – 7 de outubro de 2016

1) Considere 10 inteiros positivos distintos que são todos primos entre si (isto é, não existe um fator primo comum a todos), mas tais que quaisquer dois deles não são primos entre si.
Qual é a menor quantidade de fatores primos distintos que podem aparecer no produto dos 10 números?

2) Duas circunferências se intersectam em A e B. Uma reta é tangente às duas circunferências nos pontos E e F. Suponha que A pertence ao interior do triângulo BEF. Sejam H o ortocentro do triângulo BEF e M o ponto médio do segmento BH. Mostre que M está na reta que passa pelo centro das duas circunferências.

Nota: O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção de suas alturas.

3) Suponha que um número real α é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Considere, então, $G = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$. Dizemos que G é um *gingado* de α. Por exemplo, como 2 é raiz de $P(x) = x^2 - x - 2$, $G = |1| + |-1| + |-2| = 4$ é um gingado de 2.
Qual é o quarto maior número real α tal que 3 é um gingado de α?

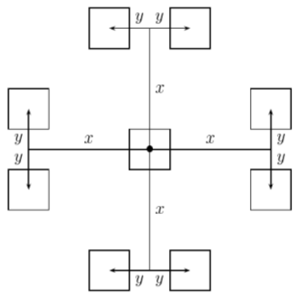
Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

6ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Segundo dia – 8 de outubro de 2016

4) Uma sequência numérica é denominada *lusófona* se satisfaz as seguintes três condições:
i) O primeiro termo da sequência é o número 1.
ii) Para obter o próximo termo da sequência podemos multiplicar o termo anterior por um número primo positivo ($2, 3, 5, 7, 11, \ldots$) ou adicionar 1.
iii) O último termo da sequência é o número 2016.
Por exemplo: $1 \xrightarrow{\times 11} 11 \xrightarrow{\times 61} 671 \xrightarrow{+1} 672 \xrightarrow{\times 3} 2016$.
Quantas sequências lusófonas existem nas quais (como no exemplo acima) a operação adicionar 1 foi utilizada exatamente uma vez e não se multiplicou duas vezes pelo mesmo número primo?

5) Dois jogadores A e B decidem disputar um jogo de tabuleiro usando um supercavalo. Primeiro A escolhe dois inteiros positivos x e y que definirão os movimentos do supercavalo, que agora será o supercavalo-(x, y). O supercavalo-(x, y) pode mover-se x casas numa direção e y casas na direção perpendicular, como ilustrado na figura. O supercavalo-(x, y) salta diretamente da casa inicial para a casa final, não passando por nenhuma casa entre elas.



Em seguida, B escolhe inteiros positivos m e n, que indicam que o tabuleiro deve ser $m \times n$. Após essas escolhas, A coloca o supercavalo em uma casinha do tabuleiro. Os jogadores B e A movem alternadamente o supercavalo-(x, y), começando o jogador B. Não é permitido mover o supercavalo-(x, y) para uma casa em que ele já esteve. Perde o primeiro jogador que não puder jogar.

Qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora?

6) Considere as potências de 2 com expoente inteiro positivo, ou seja, os números da forma 2^n em que n é um inteiro positivo: $2, 4, 8, 16, \ldots$
Prove que toda potência de 2 com expoente inteiro positivo pode ser escrita na forma

$$5xy - x^2 - 2y^2$$

com x e y ímpares positivos.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Provas da OMCPLP2016

6ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Segundo dia – 8 de outubro de 2016

4) Oito seleções de futebol da CPLP disputaram um campeonato no qual cada time jogou uma única vez com cada um dos demais times. No futebol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e a seleção derrotada não pontua.
Nesse campeonato quatro seleções ficaram em primeiro lugar com 15 pontos e as outras quatro ficaram em segundo lugar com N pontos cada.

Sabendo que houve 12 empates durante todo o campeonato, determine N.

5) Uma sequência numérica é denominada *lusófona* se satisfaz as seguintes três condições:
i) O primeiro termo da sequência é o número 1.
ii) Para obter o próximo termo da sequência podemos multiplicar o termo anterior por um número primo positivo ($2, 3, 5, 7, 11, \ldots$) ou adicionar 1.
iii) O último termo da sequência é o número 2016.
Por exemplo: $1 \xrightarrow{\times 11} 11 \xrightarrow{\times 61} 671 \xrightarrow{+1} 672 \xrightarrow{\times 3} 2016.$
Quantas sequências lusófonas existem nas quais (como no exemplo acima) a operação adicionar 1 foi utilizada exatamente uma vez e não se multiplicou duas vezes pelo mesmo número primo?

6) Considere as potências de 2 com expoente inteiro positivo, ou seja, os números da forma 2^n em que n é um inteiro positivo: $2, 4, 8, 16, \ldots$
Prove que toda potência de 2 com expoente inteiro positivo pode ser escrita na forma

$$5xy - x^2 - 2y^2$$

com x e y ímpares positivos.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos