Funções quadráticas e polinômios

Carlos Shine

No que segue na parte teórica, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Seja também $\Delta = b^2 - 4ac$ o *discriminante* de f.

1 Funções quadráticas para ajudar nas contas

- (Equação do segundo grau) Se $\Delta \geq 0$ então $f(x) = 0 \iff x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Se $\Delta < 0$ então $f(x)$ nunca é igual a zero. Note que se $\Delta = 0$ só existe um valor de x tal que $f(x) = 0$, que é $-\frac{b}{2a}$.
- (Soma e produto) Sejam x_1, x_2 as raízes de f para $\Delta \geq 0$ (se $\Delta = 0$, $x_1 = x_2$. Então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
- (Fatoração) Sejam x_1, x_2 as raízes de f para $\Delta \geq 0$. Então $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Isso pode ser generalizado para polinômios de grau maior: se temos todas as raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (possivelmente com repetições), $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$.
- (Equação dadas raízes) Note que o fato anterior pode ser usado "ao contrário": uma equação de segundo grau com raízes r e s é $(x - r)(x - s) = 0 \iff x^2 - (r + s)x + rs = 0$.

1.1 Alguns exemplos

Exemplo 1. (OBM) a, b, c, d são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$, e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.

Solução. Usando soma e produto, temos

$$a + b = 3c, \quad ab = -8d, \quad c + d = 3a, \quad cd = -8d.$$

As equações com produtos não parecem ser úteis. Por outro lado, o melhor que obtemos é $a+b+c+d = 3(a+c)$. Por um lado, reduzimos o problema a achar $a+c$. Por outro lado, precisamos de outras equações para isso.

Uma ideia é lembrar que as raízes satisfazem a equação! Como a é raiz de $x^2 - 3cx - 8d = 0$, $a^2 - 3ca - 8d = 0$. Fazendo o mesmo para c na outra equação, temos também $c^2 - 3ac - 8b = 0$. Subtraindo as equações, podemos cortar ac e fatorar a diferença de quadrados:

$$a^2 - 3ca - 8d - c^2 + 3ac + 8b = 0 \iff (a - c)(a + c) = 8(d - b).$$

Agora obtemos $a - c$ e $b - d$, então precisamos relacionar essas duas diferenças. Voltando ao começo, de $a + b = 3c$ e $c + d = 3a$, que tal subtrair essas duas equações? Obtemos

$$a + b - c - d = 3(c - a) \iff d - b = 4(a - c).$$

Assim, como $a \neq c$,

$$(a - c)(a + c) = 8 \cdot 4(a - c) \iff a + c = 32.$$

Logo $a + b + c + d = 3 \cdot 32 = 96$.

Exemplo 2. (Rússia) Sejam a, b, c números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ têm exatamente uma raiz real em comum e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0$ também têm exatamente uma raiz real em comum. Determine a soma $a + b + c$.

Solução. Em problemas com raízes comuns, o normal é dar nome para essas raízes comuns e montar um sistema de equações.

Sejam r e s as raízes comuns dos dois pares de equações. Assim, $r^2 + ar + 1 = r^2 + br + c = 0 \implies r(b-a) = 1 - c$ e $s^2 + s + a = s^2 + cs + b = 0 \implies s(1-c) = b - a$. Se $a = b$ e $c = 1$ os pares de equações coincidem e as equações devem ter só uma raiz em comum, a não ser que ela seja dupla, ou seja, $a = b = \pm 2$, mas aí $x^2 + x + a = 0$ não tem raiz dupla. Logo $a \neq b$ e $c \neq 1$.

Deste modo $s = 1/r$, e

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + a \iff 1 + r(1 + ar) = 0 \iff 1 + ar = -\frac{1}{r}.$$

Assim,

$$r^2 + ar + 1 \iff r^2 - \frac{1}{r} = 0 \iff r = 1,$$

e $1^2 + a + 1 = 0 \iff a = -2$ e $1 + b + c = 0 \iff b + c = -1$, e achamos $a + b + c = -2 - 1 = -3$.

1.2 Problemas

Agora tente esses problemas!

1. (OBM) Os números reais a, b, r e s são tais que as raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{s}$ e as raízes de $x^2 - rx + s = 0$ são a e b. Sabendo que $a > 0$, calcule seu valor.

2. (Rússia) Um polinômio quadrático mônico $P(x)$ é tal que $P(x)$ e $P(P(P(x)))$ têm uma raiz em comum. Prove que $P(0) \cdot P(1) = 0$.

3. (Rússia) Os números reais a e b são tais que cada polinômio $x^2 + ax + b$ e $x^2 + bx + a$ têm duas raízes reais distintas, e o produto desses polinômios tem três raízes reais distintas. Encontre a soma dessas três raízes.

2 Funções quadráticas: raízes e desigualdades

- (Sinal de f) Se $\Delta > 0$, sejam $x_1 < x_2$ as raízes de f. Então $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para $x < x_1$ ou $x > x_2$ e sinal contrário de a para $x_1 < x < x_2$; se $\Delta = 0$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para todo x real exceto $x = x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; se $\Delta < 0$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para todo x real.

- (Sinal de f, situação inversa) Se $f(x) \geq 0$ para todo x real então $a > 0$ e $\Delta \leq 0$.

- (Existência de raízes) Se $a \cdot f(r) < 0$ para algum r real então $f(x)$ tem duas raízes reais distintas.

- (Imagem de f) Se $a > 0$, os valores que f assume são todos os reais maiores ou iguais a $-\frac{\Delta}{4a}$, ou seja, $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, com igualdade para $x = -\frac{b}{2a}$. Se $a < 0$, $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$, com igualdade para $x = -\frac{b}{2a}$.

2.1 Alguns exemplos

A primeira desigualdade importante tem a ver com existência de raízes.

Exemplo 3. (OBM) Sejam p e q inteiros. Sabendo que $x^2 + px + q$ é positivo para todo x inteiro, prove que a equação $x^2 + px + q = 0$ não possui solução real.

Solução. Primeiro, veja que o valor mínimo de $f(x) = x^2 + px + q$ é obtido para $x = -p/2$. Se $-p/2$ é inteiro, ou seja, p é par, $f(x) > 0$ para todo x, e a equação não tem solução real.

Se p é ímpar, temos $-(p-1)/2$ inteiro, e assim, sendo $f(-(p-1)/2)$ inteiro,

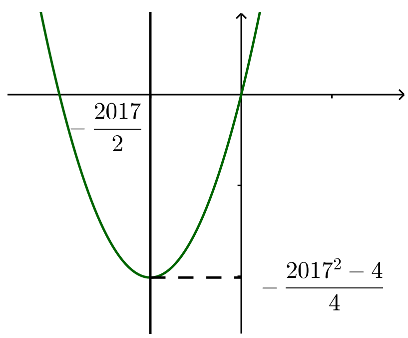
$$f\left(-\frac{p-1}{2}\right) \geq 1 \iff \left(-\frac{p-1}{2}\right)^2 - p\frac{p-1}{2} + q \geq 1 \iff 1 - p^2 + 4q \geq 4 \iff p^2 - 4q \leq -3,$$

ou seja, o discriminante de f é negativo, e f não tem raízes reais.

Saber a imagem de uma função quadrática pode ser decisivo em vários problemas.

Exemplo 4. (OBM) Seja $f(x) = x^2+2007x+1$. Prove que, para todo inteiro positivo n, $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0$ tem pelo menos uma raiz real.

Solução. Às vezes é mais fácil provar que existe uma raiz com desigualdades. Em particular, a chave desse problema é que podemos definir f em $A = \left[-\frac{2007}{2}, +\infty\right[$, já que $f(-2007-x) = f(x)$, e que a imagem de f, $Im(f) = \left[-\frac{2007^2-4}{4}, +\infty\right[$ contém esse intervalo.



Por que esse fato é tão importante? A ideia é que, quando fazemos, por exemplo, $f(g(x))$, o que "sai" de g (imagem de g) "entra" em f. Como f de A em $\mathbb{R}$ cobre toda a imagem $Im(f)$, e $A \subset Im(f)$, na hora de fazer $f(f(x))$, como o $f(x)$ de "dentro" cobre A (sendo mais específico: $f(x)$ assume todos os valores de A), a imagem de $f(f(x))$ é a mesma de $f(x)$. Da mesma forma, a imagem de $f(f(f(x)))$ é a mesma de $f(f(x))$, que é a mesma de $f(x)$, e por indução podemos mostrar que, sendo $f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots))$, $Im(f_n) = Im(f)$: basta notar que se vale para $n-1$, $f_{n-1}(x)$ cobre todos os valores de A, então $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ tem como imagem $Im(f)$.

Como a imagem de f contém 0, $f_n(x) = 0$ sempre tem solução para todo n inteiro positivo.

Às vezes não escapamos de entrar nas minúcias de resolver equações. Nesse caso, quando temos $f(f(x)) = 0$, é melhor fazer por partes do que abrir toda a conta.

Exemplo 5. (Rússia) Sejam f e g polinômios mônicos de grau 2 tais que $f(g(x)) = 0$ e $g(f(x)) = 0$ não têm soluções reais. Prove que pelo menos uma das equações $f(f(x)) = 0$ e $g(g(x)) = 0$ também não tem soluções reais.

Solução. Se f ou g, digamos f, não tem raízes reais, $f(f(x))$ também não raízes reais, e o problema acabou. Então suponha que f e g têm raízes reais, e sejam $r \geq s \geq t \geq u$ essas raízes (se f ou g tem raiz dupla, considere como duas raízes iguais).

Suponha, sem perdas, que r é raiz de f. Então $f(g(x)) = 0 \iff g(x) = r$. Como $f(g(x))$ não tem raízes reais, e g é mônico, $g(x) > r$ para todo x real. Assim, como r é o máximo das raízes, $g(x) > r, s, t, u$ para todo x real. Mas $g(g(x)) = 0 \implies g(x) \in \{s, t, u\}$, ou seja, $g(g(x)) = 0$ não tem solução.

Note que aqui usamos o princípio do extremo e como resolver inequações do segundo grau no lugar do discriminante; essa última técnica, de mostrar que igualdades não acontecem com desigualdades, pode ser usada em diversos problemas.

Podemos também construir funções quadráticas para resolver problemas bem interessantes:

Exemplo 6. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais cuja soma é zero e cuja soma dos quadrados é 1. Prove que existem dois deles, x_i, x_j, tais que $x_i x_j \le -\frac{1}{n}$.

Solução. Como a soma dos números é zero, algum número é negativo e outro é positivo. Supondo sem perdas que $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, vamos provar que $x_1 x_n \le -1/n$. Considere a função quadrática $f(x) = (x - x_1)(x - x_n) = x^2 - (x_1 + x_n)x + x_1 x_n$. Então $x_i \ge x_1$ e $x_i \le x_n \implies (x_i - x_1)(x_i - x_n) \le 0 \iff f(x_i) \le 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
x_1^2 - (x_1 + x_n)x_1 + x_1 x_n &\le 0 \\
x_2^2 - (x_1 + x_n)x_2 + x_1 x_n &\le 0 \\
x_3^2 - (x_1 + x_n)x_3 + x_1 x_n &\le 0 \\
&\vdots \\
x_n^2 - (x_1 + x_n)x_n + x_1 x_n &\le 0
\end{aligned}$$

Somando todas as inequações obtemos

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + x_n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n x_1 x_n \le 0 \\
\iff &1 - (x_1 + x_n) \cdot 0 + n x_1 x_n \le 0 \iff x_1 x_n \le -\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

2.2 Problemas

1. (Rússia) Sejam a, b, c reais. Prove que pelo menos uma das equações $x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0$, $x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$, $x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$ tem soluções reais.

2. (Rússia) Seja $f(x) = x^2 + ax + b$. Sabe-se que $f(f(x)) = 0$ tem quatro raízes reais distintas, e que a soma de duas dessas raízes é -1. Prove que $b \le -\frac{1}{4}$.

3. (Rússia) Sejam a e b reais distintos tais que $(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$ não tem soluções reais em x. Prove que $20(b - a)$ não é inteiro.

3 Funções polinomiais

No que segue, P é um polinômio com coeficientes reais.

- (Raízes e fatoração) Se r é raiz de P então $P(x) = (x - a)Q(x)$, em que $Q(x)$ é outro polinômio.

- (Todas as raízes e fatoração) Se P tem grau n e raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (não necessariamente distintas) então
$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

- (Pesquisa de raízes) Se $P(s) \cdot P(t) < 0$, então existe uma raiz de P no intervalo $]s, t[$.

- (Polinômios, raízes e grau) Um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.

- (Polinômios de grau ímpar) Sendo P um polinômio de grau ímpar, $P(x)$ e $P(-x)$ têm sinais diferentes para x grande e ficam arbitrariamente grandes em módulo; em particular, P tem raiz real.

3.1 Alguns exemplos

A ideia básica mais importante, inicialmente, é fatorar polinômios.

Exemplo 7. (Rússia) Sejam a, b, c inteiros positivos distintos. Verifique se existe um polinômio $P(x) = kx^2 + \ell x + m$, k, ℓ, m inteiros, $k > 0$, que assume os valores a^3, b^3, c^3 para valores inteiros de x?

Solução. Seja $Q(x) = P(x) - x^3$. Então $Q(x)$ tem a, b, c como raízes, ou seja,

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)A(x) \iff P(x) = x^3 + A(x)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Poxa, mas P precisa ser quadrático! Ora, basta cortar o x^3, escolhendo $A(x)$ constante igual a -1:

$$P(x) = x^3 - (x-a)(x-b)(x-c) = (a+b+c)x^2 - (ab+bc+ca)x + abc.$$

Note que $a+b+c > 0$ e $-(ab+bc+ca)$ e abc são inteiros.

O próximo exemplo usa várias ideias de polinômios e algumas ideias de funções quadráticas.

Exemplo 8. (Rússia) Sejam $F(x)$ e $G(x)$ polinômios cúbicos mônicos. As raízes das equações $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ e $F(x) = G(x)$ são escritas na lousa, e nota-se que são oito números distintos. Prove que o maior e o menor desses oito números não podem ser ambos raízes de $F(x)$.

Solução. A função $D(x) = F(x) - G(x)$ é quadrática, pois o x^3 cancela. Primeiro suponha que o coeficiente de $D(x)$ em x^2 é positivo. Então, sendo $r < s$ as raízes de $F(x) = G(x)$, $F(x) > G(x)$ para $x < r$ ou $x > s$. Agora, se a maior das oito raízes M é de F, temos $M > s \implies G(M) < F(M) = 0$, e como $G(x) > 0$ para x positivo suficientemente grande, existe uma raiz de G maior do que M, absurdo.

Assim, o coeficiente de $D(x)$ em x^2 é negativo. Nesse caso, $F(x) < G(x)$ para $x < r$ ou $x > s$. Nesse caso, suponha que a menor raiz m seja de F. Então $m < r \implies G(m) > F(m) = 0$, e como $G(x) < 0$ para x negativo suficientemente grande, existe uma raiz de G menor do que m, outro absurdo.

3.2 Problemas

4. (Rússia) Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios mônicos de grau 10 e coeficientes reais. Prove que se $P(x) = Q(x)$ não tem soluções reais então $P(x+1) = Q(x-1)$ tem uma solução real.

5. (Rússia) Sejam $P(x)$ um polinômio e $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ reais com $a_1a_2a_3 \neq 0$. Sabe-se que

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

   Prove que $P(x)$ tem pelo menos uma raiz real.

6. (Rússia) O polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem três raízes reais distintas. O polinômio $P(Q(x))$, sendo $Q(x) = x^2 + x + 2001$, não tem raízes reais. Prove que $P(2001) > \frac{1}{64}$.