Dou Mó Valor aos Autovalores

21ª Semana Olímpica – Maceió, AL
Prof. Davi Lopes – Nível U

1. Definições Preliminares

Dada uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ de entradas complexas, podemos definir os conceitos a seguir, que serão muito importantes no estudo de Álgebra Linear.

Definição de Autovalor: Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Definição de Autovetor: Dizemos que $v_{n\times 1} \neq 0_{n\times 1}$ é um autovetor de A relativa a $\lambda \in \mathbb{C}$ se $Av = \lambda v$.

Definição de Polinômio Característico: Definimos o polinômio característico de A como sendo o polinômio $P_A^C(x) = \det(xI_n - A)$.

Propriedades Básicas

1°) Para quaisquer matrizes X e Y, quadradas de ordem n, temos:

- $\det(XY) = \det(YX)$;
- $\operatorname{tr}(X+Y) = \operatorname{tr} X + \operatorname{tr} Y$;
- $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$;

2°) λ é um autovalor de A se, e somente se, existe um autovetor de A relativo a λ.

3°) $P_A^C(x)$ é um polinômio de grau n, cujas raízes são os autovalores de A, contados com multiplicidade. Com isso, podemos escrever $P_A^C(x) = (-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

4°) $\det A = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$ e $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ ($\operatorname{tr} A = a_{11} + \dots + a_{nn}$ é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A).

5°) Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A, então, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ são autovalores de A^n. Ademais, se v é um autovalor relativo a um autovalor λ de A, então v é um autovalor relativo ao autovalor λ^k de A^k. Se $\lambda_i \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, o resultado acima também vale para $k < 0$ inteiro.

Observação: a multiplicidade do autovalor λ^k de A^k não necessariamente é a mesma multiplicidade do autovalor λ de A.

6°) (Teorema do Mapeamento Espectral) Seja $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ um polinômio de coeficiente complexos e de grau $m \geq 1$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A, então $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$ são autovalores de $Q(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$. Ademais, se v é autovalor relativo a um autovalor λ de A, então v é autovalor relativo ao autovalor $Q(\lambda)$ de $Q(A)$.

Observação: a multiplicidade do autovalor $Q(A)$ de $Q(A)$ não necessariamente é a mesma multiplicidade do autovalor λ de A.

7°) Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são todos os autovalores de A (sem multiplicidade), e se $v_1, \dots, v_k$ são autovalores respectivos associados, então $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente.

8°) Se A é uma matriz triangular, então os elementos da diagonal principal são os n autovalores de A, contados com multiplicidade.

8°) (Autovetor Transposto) λ é um autovalor de A se, e somente se, existe uma matriz não-nula $u_{1\times n}$ tal que $uA = \lambda u$. Nesse caso, dizemos que u é um autovetor transposto de A, e além disso, para todo autovetor transposto u, existe autovetor v tal que $u = v^T$.

Exercícios

01. Existem matrizes quadradas A e B tais que $AB - BA = I$?
02. Para $n \geq 3$, seja $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) = (1,1,1,0,\dots,0)$. Seja $A_n = (a_{ij})$ a matriz $n \times n$ definida or $a_{ij} = b_{j-i}$, onde os índices da sequência $\{b_k\}$ são considerados módulo n (ou seja, $b_i = b_{i+n} = b_{i-n}$, para todo inteiro i). Demonstre que:

$$\det A_n = \begin{cases} 3, se\ 3 \nmid n \\ 0, se\ 3|n \end{cases}$$

03. Sejam $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ números complexos quaisquer, e considere o polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1}$. Considere ainda a matriz circular $A_{n\times n}$, dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Prove que $\det A = P(1).P(\omega) \dots P(\omega^{n-1})$, onde $\omega = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

04. (OBM/2008): Prove que não existe uma matriz real 7×7 com entradas não negativas cujos autovalores, contados com multiplicidade, são $6, -5, -5, 1, 1, 1, 1$.
05. (Putnam/1999): Para $n \geq 3$ fixo, seja $A = \{a_{ij}\}$, onde $a_{ij} = \cos(2\pi(i+j)/n)$. Determine, em função de n, o valor de $\det A$.

2. Diagonalização, Matrizes Simétricas e Normais

Definição de Matriz Diagonalizável: Dizemos que uma matriz é diagonalizável se ela é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, uma matriz onde todas as suas entradas são nulas, exceto, possivelmente, as diagonais da entrada principal.

Matriz Adjunta: Dada uma matriz $A = \{a_{ij}\} \in M_n(\mathbb{C})$, definimos sua matriz adjunta $A^* \in M_n(\mathbb{C})$ como sendo a transposta da matriz conjugada, ou seja, $A^* = \overline{A^T} = \{\overline{a_{ji}}\}$.

Matriz Normal: Dizemos que a matriz A é normal se $AA^* = A^*A$.

Base Ortonormal: Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial de dimensão n, munido de um produto interno $\langle\quad\rangle$. Dizemos que tal base é uma base ortonormal se $\langle v_i, v_i \rangle = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$, e $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, se $i \neq j$.

Propriedades

1°) $A_{n\times n}$ é diagonalizável se, e somente se, possui n autovetores linearmente independentes. Além disso, se $v_1, \dots, v_n$ são autovetores, associados respectivamente a autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, então $A = M^{-1}\Lambda M$, onde $M = (v_1, \dots, v_n)$ é a matriz cuja i −ésima coluna é v_i e:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Em particular, se A tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

2°) Se $A = M^{-1}\Lambda M$, com Λ matriz diagonal, então as n colunas de M são n autovetores linearmente independentes de A.

3°) (Teorema Espectral) Uma matriz A é normal se, e somente se, existe uma base ortonormal de autovetores de A. Em particular, toda matriz real simétrica ($A = A^T$), é diagonalizável, bem como toda matriz real ortogonal ($A^{-1} = A^T$) é diagonalizável.

4°) Dadas matrizes complexas A, B de ordem n, temos que $\langle Av, w\rangle = \langle v, Bw\rangle$, para todos os vetores $v, w \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, se, e somente se, $B = A^*$. Com isso, podemos provar que todos os autovalores de uma matriz real simétrica são reais.

Exercícios

06. (IMC/2014): Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz simétrica $n \times n$ com entradas reais, e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$seus autovalores. Mostre que:

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ii}a_{jj} \ge \sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\lambda_j$$

E determine todas as matrizes A para os quais ocorre igualdade.

07. (IMC/2013): Sejam A e B matrizes reais simétricas com todos seus autovalores estritamente maiores que 1. Seja λ um autovalor real da matriz AB. Prove que $|\lambda| > 1$.
08. (OBMU/2012) Considere todas as matrizes quadradas de ordem 4n que têm 4n entradas iguais a 1 e 4n entradas iguais a –1 e as demais entradas iguais a 0. Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de n)?

3. Semelhança de Matrizes e a Forma Canônica de Jordan

Matrizes Semelhantes: Dadas duas matrizes A e B, de ordem n e com entradas complexas, dizemos que A é semelhante a B (representamos isso por $A \sim B$) se existe uma matriz invertível $M_{n\times n}$ tal que $A = M^{-1}BM$. Pode-se provar que a semelhança de matrizes é uma relação de equivalência no conjunto das matrizes de dimensão fixa.

Bloco de Jordan: Um bloco de Jordan de ordem r associado a λ é a matriz de ordem r que possui termos λ na diagonal principal e 1 na diagonal imediatamente superior, ou seja, é da forma abaixo:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan: Uma matriz A é dita estar na forma canônica de Jordan se:

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_t \end{bmatrix}$$

Onde cada M_k é um bloco de Jordan, de alguma ordem.

Propriedades

1°) Toda matriz quadrada A é semelhante a alguma matriz J na forma canônica de Jordan (ou seja, é "quase diagonalizável"). Além disso, se J' é uma outra matriz na forma canônica de Jordan semelhante a A, então J e J possuem os mesmos blocos de Jordan, com uma possível diferença na ordem dos blocos.

2°) Duas matrizes quadradas A e B são semelhantes se, e somente se, possuem as mesmas formas canônicas de Jordan. Em particular, se A e B são semelhantes, então A e B possuem os mesmos autovalores e $posto(A) = posto(B)$.

3°) Seja A uma matriz quadrada, de autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Suponha que, para cada $i = 1, \dots, k$, b_{λ_i} é o número de blocos de Jordan associados a λ_i na forma canônica de A. Então:

- A quantidade máximo de autovetores de A que são linearmente independentes é $b_{\lambda_1} + \cdots + b_{\lambda_k}$, ou seja, o número de blocos da forma canônica de A.
- O número máximo de autovetores linearmente independentes de A associados a λ_i é b_{λ_i}, o número de blocos associados a λ_i na forma canônica de A.
- $posto(A) = n - b_0$, onde b_0 é o número de blocos associados a 0.

Exercícios

09. (IMC/2009): Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tais que $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(AB - BA)^k = 0_n$.
10. Seja $\alpha \neq 0$ real e n um inteiro positivo. Suponha que F e G são aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $F \circ G - G \circ F = \alpha F$.
    (a) Mostre que, para todo $k \geq 1$, tem-se $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F^k$.
    (b) Mostre que existe $k \geq 1$ tal que $F^k = 0_n$
11. (CIIM/2013) Sejam A, B matrizes $n \times n$ com entradas complexas. Mostre que existe uma matriz T e uma matriz invertível S tal que $B = S(A+T)S^{-1} - T$ se, e somente se, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

4. Polinômio Minimal e Polinômio Característico

Definição de Polinômio Minimal: Dada uma matriz $A_{n\times n}$ de entradas complexas, definimos o polinômio minimal de A como sendo o polinômio $P_A^m(x) \in \mathbb{C}[x]$, de menor grau possível e tal que $P_A^m(A) = 0$.

Propriedades

1°) $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ cumpre $Q(A) = 0$ se, e somente se, $P_A^m(x)$ divide $Q(x)$.

2°) (Teorema de Cayley-Hamilton) $P_A^m(x)$ divide $P_A^C(x)$, isto é, $P_A^C(A) = 0$.

3°) Se $P_A^C(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \dots (x - \lambda_r)^{c_1}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são todos os autovalores de A (sem multiplicidade), então $P_A^m(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$, onde m_i é o tamanho do maior bloco de Jordan associado ao autovalor λ_i $(i = 1, \dots, r)$.

4°) Uma matriz é diagonalizável se, e somente se, $P_A^m(x)$ não tem raízes duplas.

5°) Se A e B são matrizes semelhantes, então $P_A^C(x) = P_B^C(x)$ e $P_A^m(x) = P_B^m(x)$.

Exercícios

12. (IMC/2017): Determine todos os complexos λ para os quais existe um inteiro positivo n e uma matriz real $A_{n\times n}$ tal que $A^2 = A^T$ e λ é um autovalor de A.
13. (IMC/2015): (a) Para qualquer inteiro $n \geq 2$ e duas matrizes invertiveis A e B, de ordem n, que satisfazem a equação $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$. Prove que $\det A = \det B$. (b) Se A e B tivessem entradas complexas, a afirmação $\det A = \det B$ sempre ocorre?
14. (IMC/2011): Existe uma matriz real $A_{3\times 3}$ tal que $\operatorname{tr} A = 0$ e $A^2 + A^T = I$?
15. (IMC/2003) Seja A uma matriz real $n \times n$ tal que $3A^3 = A^2 + A + I$. Mostre que a sequência $(A^k)_{k\geq 1}$ converge para uma matriz idempotente, ou seja, uma matriz B tal que $B^2 = B$.
16. (OIMU/2005): Considere matrizes reais quadradas A, B, C de ordem n tais que $A^3 = -I$, $BA^2 + BA = C^6 + C + 1$. É possível ter $n = 2005$?
17. (Romênia) Sejam A, B matrizes 2×2 com entradas inteiras, tais que $AB = BA$ e $\det B = 1$. Prove que se $\det(A^3 + B^3) = 1$, então $A^2 = 0_2$.
18. Sejam A e B duas matrizes de ordem 2, com determinante igual a 1. Prove que:
$$\operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + \operatorname{tr}(AB^{-1}) = 0$$
19. Determine todas as matrizes 2×2 com entradas reais, tais que:
$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$
20. Dadas duas matrizes de mesma ordem X, Y, o comutador de X e Y é definido como $[X, Y] = XY - YX$. Dadas as matrizes A, B, C, D. quadradas de ordem 2, prove que:
(a) $[A, B] \cdot [C, D] + [C, D] \cdot [A, B]$ é um múltiplo escalar da matriz identidade.
(b) Se $A \cdot [A, B] = [A, B] \cdot A$ e $B \cdot [A, B] = [A, B] \cdot B$, então $[A, B] = 0_2$.
21. Sejam A, B matrizes 3×3. Prove que $3 \det(AB - BA) = \operatorname{tr}((AB - BA)^3)$
22. Seja A uma matriz quadrada com entradas reais. Prove que $\det(I + A^2) \geq 0$.
23. Seja A uma matriz real antissimétrica (ou seja, $A^T = -A$). Demonstre que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\det(I + tA^2) \geq 0$.
24. Sejam A, B duas matrizes $n \times n$ reais que comutam, tais que $\det(A + B) \geq 0$. Prove que $\det(A^k + B^k) \geq 0$, para todo $k \geq 1$.
25. Sejam A, B, C matrizes reais quadradas e de mesma ordem, que comutam entre si e tais que $ABC = 0$. Prove que $\det(A^3 + B^3 + C^3) \,.\, \det(A + B + C) \geq 0$.

5. Densidade das Matrizes Diagonais Inversíveis

Teorema: Seja $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas complexas, e seja $S_n(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas complexas, que são inversíveis e com autovalores distintos. Então, $S_n(\mathbb{C})$ é denso em $M_n(\mathbb{C})$.

Exercícios

26. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem n. Prove que $\det(AB + I) = \det(BA + I)$
27. Sejam A, B, C, D matrizes quadradas de ordem n tais que $AC = CA$. Prove que:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

28. (IMC/2017) Defina as sequências $A_1, A_2, \ldots$ de matrizes através da seguinte recorrência:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix} \ \ (n = 1,2, \ldots)$$

Prove que A_n possui $n + 1$ autovalores inteiros distintos $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, com multiplicidades $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$, respectivamente.

29. Sejam $A : V \to W$ e $B : W \to V$ aplicações lineares entre espaços vetoriais V, W, de dimensões finitas cada. Prove que as aplicações lineares $A \circ B$ e $B \circ A$ possuem o mesmo conjunto de autovalores não nulos, e com a mesma multiplicidade.
30. Para cada matriz A de ordem n, defina, para todo $k = 1, \ldots, n$, $\sigma_k(A)$ como sendo o k-ésimo polinômio simétrico nos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, ou seja:

$$\sigma_k(A) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}$$

Prove que, para duas matrizes A e B de ordem n, temos $\sigma_k(AB) = \sigma_k(BA)$, para todo $k = 1, \ldots, n$.