Problemas Diversos de Invariantes e Semi-invariantes

XXI Semana Olímpica – Maceió, Janeiro 2018

Prof. George Lucas

1. Escrevemos os números inteiros de 1 a 10 (inclusive) no quadro. A cada passo, escolhemos dois números quaisquer do quadro e trocamos pela soma deles. Ao final, vai sobrar somente um número. Quem é esse número?

2. Seja n um inteiro positivo ímpar. Inicialmente Douradinho escreve os números 1,2,...,2n no quadro. Uma operação consiste em escolher dois números a e b no quadro, apagá-los e escrever no lugar $|a-b|$. Ele realiza essas operações até que sobre apenas um número. Prove que o número final é ímpar.

3. Há vários sinais + e – escritos em uma lousa. A cada segundo podemos apagar dois sinais e, no lugar deles, escrever um sinal de +, se os sinais apagados eram iguais, ou um sinal -, se os sinais apagados eram diferentes. Mostre que, quando restar um só sinal escrito na lousa, este não dependerá da ordem em que fizemos as substituições.

4. Removemos dois cantos opostos de um tabuleiro 8 x 8. É possível cobrir o tabuleiro resultante com dominós 1 x 2?

5. Cada um dos números 1 a 10^6 é repetidamente substituído pela soma de seus dígitos até obtermos 10^6 números de um dígito. Teremos mais 1s ou 2s?

6. Escrevemos os números de 1 a 19 no quadro. A cada passo trocamos dois números da lousa a e b por $\sqrt{a^2+b^2}$. Ao final irá restar apenas um número. Quais os possíveis valores desse número?

7. Temos 2018 moedas sobre uma mesa. Dessas, 199 estão com a face *cara* virada para cima, e as demais com a face *coroa.* Uma operação consiste em escolher duas moedas e virá-las simultaneamente. É possível, após um número finito de operações, obtermos todas as moedas com a mesma face virada para cima?

8. Em cada casa de um tabuleiro n x n escreve-se um número real. Uma operação consiste em trocar todos os sinais dos números de uma linha ou coluna. Prove que, realizando algumas operações, é possível obter um novo tabuleiro para o qual a soma de cada linha e coluna é não-negativa.

9. Um círculo é dividido em seis setores. Então os números 1, 0, 1, 0, 0, 0 são escritos nos setores (no sentido anti-horário). Uma operação permitida é adicionar uma unidade em dois setores vizinhos. É possível, após um número finito de operações, obter todos os números dos setores iguais?

10. São escritos os números 1,2,3,...,n (n>1) no quadro. Uma operação consiste em apagar dois números *a* e *b* e escrever $\frac{ab}{a+b}$. Após as operações irá restar apenas um número ao final. É possível que esse número seja o inverso de um inteiro?

11. Seja $a_1, a_2, \dots, a_n$ uma permutação de 1, 2, ..., n. Se n é ímpar, prove que $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$ é par.

12. Em cada vértice de um quadrado temos certa quantidade de fichas (possivelmente nenhuma). Uma operação permitida é remover certa quantidade de fichas de um vértice e colocar o dobro de fichas em um dos vértices adjacentes a esse. Suponha que começamos com apenas uma ficha em um dos vértices, os outros três vértices estando vazios. É possível, após certo número de movimentos, termos 1, 9, 8, 9 fichas nos vértices do quadrado, quando este é percorrida no sentido horário?

13. (St. Petersburg 1997) O número 999...9 (1997 9s) é escrito no quadro. A cada minuto, um dos números escritos no quadro é fatorado em dois fatores e é apagado do quadro. Cada um desses fatores é (independentemente) acrescentado ou diminuído de duas unidades, e os dois números resultantes são escritos no quadro. É possível, em algum momento, obter todos os números escritos no quadro iguais a 9?

14. Os números 1,2,...,2n são divididos em duas sequências: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ e $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Determine (em função de n) todos os possíveis valores de $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$.

15. Há *a* fichas brancas, *b* fichas pretas e *c* fichas vermelhas em uma mesa. Em cada passo, trocamos duas fichas de cores diferentes por uma ficha da terceira cor. Determine as condições necessárias e suficientes para *a, b* e *c* tal que é possível chegarmos a apenas uma ficha no final.

16. Cada um dos números $a_1, \dots, a_n$ é +1 ou -1. Suponha que
$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$$
Prove que 4|n.

17. (OCM 2015) Em um planeta distante há apenas três habitantes, chamados Alfa, Beta e Gama. Alfa e Beta são amigos, Beta e Gama são amigos, mas Alfa e Gama são inimigos. Neste planeta há exatamente três fichas, uma azul, uma branca e uma cinza, e cada um dos habitantes carrega consigo uma das fichas. Cada vez que Alfa e Beta se encontram, eles trocam as fichas que carregam consigo. Beta e Gama também trocam as fichas que carregam consigo cada vez que se encontram. Alfa e Gama, porém, não trocam suas fichas quando se encontram. No início do dia, Alfa estava com a ficha azul, Beta estava com a ficha branca e Gama estava com a ficha cinza. Se Beta trocou de ficha 18 vezes durante o dia, é possível que no final do dia Alfa esteja com a ficha cinza, Beta esteja com a ficha branca e Gama esteja com a ficha azul?

18. Os números de 1 a n são colocados em uma ordem arbitrária. Definimos uma operação como segue: se o primeiro número na sequência é k, então invertemos a ordem dos primeiros k números na sequência (então o primeiro termo se torna o k-ésimo, o segundo se torna o (k-1)-ésimo e assim sucessivamente). Prove que após um número finito de operações, o primeiro termo será 1.

19. Inicialmente os números 3 ,4 e 12 estão escritos em uma folha de papel. Em cada passo, devem-se escolher dois número a e b e substituí-los por 0.6a – 0.8b e 0.6a + 0.8b.
    (a) É possível , em algum momento, obter os números 4, 6 e 12?
    (b) É possível, em algum momento, obter *x*, *y* e *z* com $|x-4|<\frac{1}{\sqrt{3}}$, $|y-6|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $|z-12|<\frac{1}{\sqrt{3}}$

20. Uma torre se move em um tabuleiro infinito de xadrez. O seu primeiro movimento é horizontal, seu segundo movimento é vertical e ela segue alternando os movimentos. O comprimento do primeiro movimento é 1, ou seja, a torre vai para uma casa vizinha, o comprimento do segundo movimento é 2 e assim por diante.
    (a) É possível que a torre volte para casa onde começou após realizar exatamente 2013 movimentos?
    (b) Determine todos os n para os quais a torre pode voltar para a casa inicial após realizar exatamente n movimentos.

21. (OBM 2004) Esmeralda tem uma pilha com 100 pedras. Ela divide essa pilha em duas novas pilhas e em seguida multiplica as quantidades de pedras nessas duas novas pilhas e escreve o produto no quadro. Ela então escolhe uma pilha com mais de uma pedra e repete esse procedimento: a pilha é dividida em duas, as quantidades de pedras nessas pilhas são multiplicadas e o produto escrito no quadro. Esta operação é realizada até se obter todas as pilhas com uma pedra. Quais são os possíveis valores da soma de todos os produtos escritos no quadro?

22. Temos os números 2048 e 1024 escritos no quadro. A cada passo trocamos dois números *a* e *b* do quadro por $\frac{3a+b}{4}$ e $\frac{3b+a}{4}$.
    (a) É possível obter os números 1540 e 1532?
    (b) É possível obter os números 1546 e 1526?

23. (Bulgária) Há 2000 bolas brancas em uma caixa. Há ainda um número suficiente de bolas brancas, verdes e vermelhas fora da caixa. As seguintes operações são permitidas com as bolas:
    (a) Trocar duas bolas brancas por uma verde.
    (b) Trocar duas bolas vermelhas por uma verde.
    (c) Trocar duas bolas verdes por uma branca e uma vermelha.
    (d) Trocar uma bola branca e uma verde por uma vermelha.
    (e) Trocar uma bola verde e uma vermelha por uma branca.

Após uma quantidade finita de operações, restam três bolas na caixa. Prove que ao menos uma delas é verde. Existe um número finito de operações que deixa na caixa somente uma bola?

24. Existem n ≥ 2 números não-nulos escritos em um quadro. Um movimento consiste em escolher dois números *a* e *b* e trocá-los por $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{b-a}{2}$. Prove que, após um número finito (e positivo) de movimentos, não poderemos obter os números iniciais novamente.

25. Os vértices de um n-ágono são rotulados com os números $x_1, \dots, x_n$. Sejam *a, b, c* e *d* quatro rótulos consecutivos. Se *(a-d)(b-c)* < 0, então trocamos de lugar *b* e *c*. É possível realizar essa operação infinitamente?

26. Considere um conjunto de pessoas. Prove que é possível dividir o conjunto em dois grupos de modo que cada pessoa tenha uma quantidade de amigos no outro grupo maior ou igual à quantidade de amigos no grupo em que está. Considere a amizade como uma relação recíproca.

27. (União Soviética) Inicialmente temos n>1 números escritos em uma lousa. Uma operação permitida com esses números é escolher dois deles, digamos *a* e *b*, apagá-los e escrever na lousa $\frac{a+b}{4}$. Assim, após cada operação, a quantidade de números escritos na lousa diminui em uma unidade. Se, inicialmente, todos os números escritos eram iguais a 1, prove que quando restar somente um número, ele será maior ou igual que $\frac{1}{n}$

28. Seja *c* um inteiro não-negativo. São escritos n números inteiros em um quadro. Uma operação consiste em escolher dois números escritos *x* e *y*, $0 \leq x - y \leq c$, e substituí-los por $x + 1$ e $y - 1$. Prove que, após um número finito de operações, não será possível realizar mais operação alguma.

29. 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, uma pessoa anda para um quarto com número maior ou igual de pessoas do qual ela estava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

30. Cada termo da sequência 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... começando pelo sétimo é o último dígito da soma dos seis últimos termos. Prove que a subseqüência de seis termos consecutivos 0,1,0,1,0,1 nunca aparece.

31. Na figura abaixo, uma operação permitida é trocar os sinais de todos os números de uma mesma linha, coluna ou paralela a uma das diagonais. Em particular, é permitido trocar o sinal de um dos quatro cantos. É possível obtermos todos os números do tabuleiro iguais a 1?

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

32. (IMO SL 2009) Considere 2009 cartas, cada uma com um lado luminoso e outro lado negro enfileirados paralelamente sobre uma longa mesa. Inicialmente todas as cartas exibem seu lado luminoso. Dois jogadores, do mesmo lado da longa mesa, jogam um jogo com movimentos alternados. Cada movimento consiste em escolher um bloco de 50 cartas consecutivas, a mais á esquerda exibindo seu lado luminoso, e virá-las. Assim as que exibem o lado luminoso passam a exibir o lado negro e vice-versa. Quem não puder mais realizar um movimento, perde.
   a) O jogo necessariamente termina?
   b) Existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador?

33. (Alemanha) Em um tabuleiro de xadrez infinito, considere um cavalo cujo movimento consiste em pular p casas em uma direção (vertical ou horizontal) seguido de q casas na outra, $p,q > 0$. Suponha que em algum momento o cavalo retorne a sua casa de origem. Prove que ele realizou uma quantidade par de movimentos.

34. Há um inteiro positivo em cada quadrado de uma mesa retangular. Um movimento consiste em escolher uma linha e dobrar cada um dos números dessa linha ou escolher uma coluna e subtrair uma unidade de cada número dessa coluna. É sempre possível que, após um número finito de operações, obtenhamos todos os números da mesa iguais a zero?

35. (Bulgária 2004) Considere todas as palavras formadas pelas letras *a* e *b*. São permitidas as seguintes operações:
   (i) Trocar um bloco *aba* por um bloco *b* e vice-versa.
   (ii) Trocar um bloco *bba* por um bloco *a* e vice-versa.

   É possível obter a sequência *baa...a* (com 2003 *a*s) a partir da sequência *aa...ab* (com 2003 *a*s)?

36. (Torneio das cidades) Em uma lousa, vários inteiros positivos são escritos. Uma operação permitida é apagar dois números distintos, dentre os escritos, e escrever no lugar deles seu mmc e mdc. Prove que, após repetirmos um número finito de vezes essa operação, os números escritos não mudam mais, não importando que operações adicionais fizermos.

37. É possível rearranjar os inteiros 1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998 tal que há exatamente $i-1$ números entre dois i's para todo i?

38. Os números 1,2...,100 são escritos em um tabuleiro 10 x 10 tal que a intersecção da i-ésima linha com a j-ésima coluna tem escrito o número 10(i-1)+j. Em cada passo realizamos o seguinte movimento: escolhemos uma casa e dois de seus vizinhos opostos (isto é, o de cima e o de baixo ou o da direita e o da esquerda) e decrescemos duas unidades desse número e acrescentamos uma unidade a cada um de seus vizinhos escolhidos ou acrescentamos duas unidades a esse número e decrescemos uma unidade de cada um de seus vizinhos. Após um número finito de passos, obtemos novamente os números 1,2,3,...,100 em alguma ordem. Prove que eles estão na mesma ordem que estavam no início.

39. (C-P-S Match 2011) São escritos no quadro n inteiros não-negativos cujo maior divisor comum é 1. Um movimento consiste de apagar dois números *x* e *y*, onde $x \geq y$, no quadro e substituí-los por *x-y* e *2y*. Determine para quais n-úplas iniciais de números no quadro é possível, após um número finito de movimentos, obter (n-1) dos números escritos no quadro iguais a zero.

40. Inicialmente os números reais *u, v* e *t* estão escritos, nessa ordem, no quadro. Uma operação consiste em trocar os números *x, y* e *z* escritos, nessa ordem, por $xu + yt + zv$, $xv + yu + zt$ e $xt + yv + zu$, nessa ordem. Suponha que, após realizarmos um número finito (e positivo) de operações, obtemos novamente os números *u, v* e *t*, nessa ordem, no quadro. Prove que *u=v=t=0.*

41. (Teste Cone Sul 2016) Em uma lousa estão escritos alguns números inteiros. Wesley pode fazer duas operações com os números escritos na lousa. A operação *safa* consiste em apagar dois números n e n+1 e escrever o número n-2. A operação *fadão* consiste em apagar dois números n e n+4 e escrever o número n-1. Wesley pode fazer *safa* ou *fadão* quantas vezes quiser.
    (a) Prove que é possível Wesley escrever uma quantidade finita de inteiros positivos distintos dois a dois na lousa e, usando as operações, obter o número -3. Observe que após fazer as operações é permitido que existam números repetidos, mas não há inteiros positivos repetidos entre os números escritos inicialmente por Wesley.
    (b) Prove que, partindo de inteiros positivos distintos dois a dois, não é possível obter um inteiro menor que -3.

42. (OBM 2004-Adaptado) Inicialmente estão escritos no quadro os números reais *a* (à esquerda) e *b* (à direita). Uma operação consiste em trocar os dois números *x* (à esquerda) e *y* (à direita) escritos no quadro por $-2018 - 10y - x^2$ (à esquerda) e x (à direita). É possível após um número finito (e positivo) de operações obter novamente os números *a* (à esquerda) e *b* (à direita) no quadro para algum par de reais *(a,b)?*

43. (Rússia 1995) São dados quatro triângulos retângulos congruentes. Uma operação consiste em cortar um dos triângulos ao longo de sua altura relativa à hipotenusa, substituindo-o pelos dois novos triângulos resultantes. Prove que, independente de como realizamos as operações, sempre haverá dois triângulos congruentes.

Referências

[1] Arthur Engel. Problem-Solving Strategies

[2] Andrei Negut. Problems For the Mathematical Olympiads

[3] Antonio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar V.4

[4] Razvan Gelca, Titu Andreescu. Putnam and Beyond