SO 2018 – Nível 3
Homotetia e outros temas relacionados
Prof. Régis

Definição: (Homotetia) Duas figuras F e F' são ditas *homotéticas* se existem pontos O e uma constante real $k \neq 0$, de maneira que para cada ponto P de F existe um ponto P' de F', tais que O, P e P' são colineares e $\frac{OP'}{OP} = k$. O ponto O é chamado de *centro de homotetia* e a constante *k* de razão de homotetia.

Obs: Deve-se ter em mente a orientação do segmento OP como se fosse um vetor. Caso a razão de homotetia seja menor que zero o ponto P' estará do lado oposto do ponto P em relação ao ponto O.

Teorema 1: O centro de homotetia pertence a todas as retas determinadas por pontos e seus homotéticos. Isso pode demonstrar propriedades de colinearidade e de concorrências.

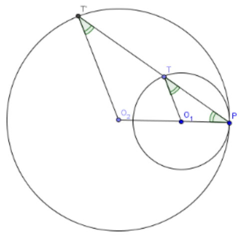
Teorema 2: Homotetia leva segmentos em segmentos paralelos.

Corolário 2.1: Dois triângulos são homotéticos se, e somente se, possuem todos os lados paralelos.

Exemplo 1: (Sharygin/2017) Sejam $A_1A_2 \ldots A_{13}$ e $B_1B_2 \ldots B_{13}$ dois 13-ágonos regulares tais que B_1 e A_{13} coincidem e esse ponto está sobre o segmento A_1B_{13}. Sabe-se também que esses dois 13 ágonos estão no mesmo semiplano definido pelo segmento A_1B_{13}. Prove que as retas A_1A_9, $B_{13}B_8$ e A_8B_9 são concorrentes.

Teorema 3: Dadas duas circunferências k_1 e k_2 tangentes entre si no ponto P. Existe uma homotetia de centro P que leva k_1 em k_2. Mais especificamente, se a tangência for interna a razão será positiva ($k > 0$ homotetia direta), caso contrário a razão será negativa ($k < 0$ homotetia inversa).

Demonstração: Considere o caso da tangência interna a seguir. Dada uma secante qualquer às duas circunferências por P cortando k_1 e k_2 em T e T', respectivamente. Provemos que eles são homotéticos.



Veja que os triângulos ΔPO_1T e $\Delta PO_2T'$ são isósceles, já que O_1 e O_2 são centros. Assim, temos:

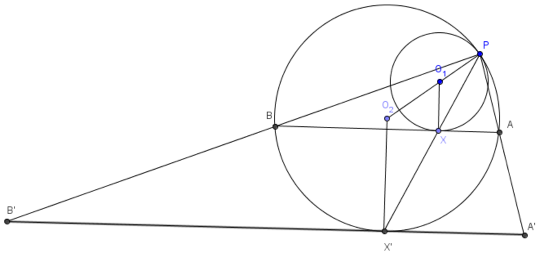
$$\angle O_1TP = \angle O_1PT = \angle O_2PT = \angle O_2T'P \Rightarrow \Delta PO_1T \sim \Delta PO_2T'(A.A.)$$

$$\Rightarrow \frac{PT'}{PT} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{r_2}{r_1}$$

Logo, a razão não depende da secante implicando a existência da homotetia de centro P e razão $k = \frac{r_2}{r_1}$. O caso de tangência externa é análogo e é deixado ao leitor.

Corolário 3.1: (Lema da Estrela da Morte ou Lema de Archimedes) Considere que uma circunferência k_1 tangencia internamente uma outra circunferência k_2 em um ponto P. Seja AB uma corda de k_2 que tangencia k_1 em X e X' o ponto médio do arco AB que não contém P. Temos que P, X e X' são colineares e que $X'A^2 = X'X \cdot X'P$.

Demonstração: Considere a figura a seguir, lembrando da homotetia do teorema 2.



Veja que o segmento AB será levado em um segmento paralelo $A'B'$ passando por X', homotético de X. O segmento O_1X é levando em O_2X' paralelo. Assim, $O_1X \perp AB \Rightarrow O_2X' \perp A'B'$ implicando $A'B'\,tangente\ por\ X'$. Ora, mas se a tangente por X' é paralela à corda AB então este ponto será o ponto médio do arco AB. Além disso, podemos que $\Delta X'XA \sim \Delta X'AP(A.A.) \Rightarrow X'A^2 = X'X \cdot X'P$

Exemplo 2: (Romênia TST/2013) As circunferências Ω e ω são tangentes no ponto P (ω está dentro de Ω). Uma corda AB de Ω é tangente a ω no ponto C. A reta PC encontra Ω novamente no ponto Q. As cordas QR e QS de Ω são tangentes a ω. Sejam I, X e Y os incentros dos triângulos APB, ARB e ASB, respectivamente. Prove que $\angle PXI + \angle PYI = 90°$.

Teorema 4: Quaisquer duas circunferências são homotéticas.

Demonstração: Se as duas forem tangentes, já foi feito acima. Se forem concêntricas? Imediato, o centro comum será o centro de homotetia. Se as duas circunferências estiverem em posição geral, trace a reta que passa pelos centros O_1 e O_2 e marque P, tal que $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{r_1}{r_2}$, basta fazer semelhança para provar que existe a homotetia desejada. Existem dois pontos P com essa propriedade. O ponto no segmento O_1O_2 é chamado de *insimilicenter* e o que está fora do segmento é chamado de *exsimilicenter*.

Corolário 4.1: Em um triângulo qualquer ΔABC há uma homotetia de centro A que leva o incírculo (I, r) no excírculo relativo (I_a, r_a) a esse vértice.

Demonstração: É muito parecido com o teorema 1. Basta traçar dos centros até os lados. Verifica-se facilmente que: $\frac{AI_a}{AI} = \frac{r_a}{r}$. Em seguida, dada uma secante cortando o incirculo em X e Y e o excirculo em X' e Y', nessa ordem partindo de A. Pode-se provar por semelhança que:

$$\frac{AX'}{AX} = \frac{AY'}{AY} = \frac{AI_a}{AI} = \frac{r_a}{r}$$

Concluindo a homotetia.

Exemplo 3: (IMO/1992) No plano, considere uma circunferência *C*, uma reta *L* tangente à circunferência e *M* um ponto da reta *L*. Encontre o lugar geométrico dos pontos *P* com a seguinte propriedade: existem dois pontos *Q*, *R* da reta *L* tais que *M* é o ponto médio de *QR* e *C* é a circunferência inscrita no triângulo *PQR*.

Teorema 5: (Teorema de Monge – composição de duas homotetias) Sejam duas homotetias de centros O_1 e O_2 e razões k_1 e k_2 respectivamente. Então a composição dessas homotetias (faz uma e depois a outra) é uma homotetia de centro O razão k_1k_2, com O sobre a reta passando O_1O_2, ou é uma translação quando $k_1k_2 = 1$.

Demonstração: Vamos fazer contas com vetores, seja P um ponto qualquer no plano. Temos:

$$\overrightarrow{O_1P'} = k_1.\overrightarrow{O_1P} \text{ e } \overrightarrow{O_2P''} = k_2\overrightarrow{O_2P'}$$

Colocando a mão na massa:

$$P' - O_1 = k_1(P - O_1) \to P' = k_1P + (1 - k_1)O_1$$
$$P'' - O_2 = k_2(P' - O_2) \to P'' = k_2P' + (1 - k_2)O_2 \to$$
$$P'' = k_1k_2P + k_2(1 - k_1)O_1 + (1 - k_2)O_2$$

E queremos que exista um ponto O tal que, veja que a razão dessa composição não poderia ser outra senão o produto k_1k_2 , pois as figuras se alteraram esse fator:

$$\overrightarrow{OP''} = k_1k_2.\overrightarrow{OP}$$

E sabemos que isso é equivalente a:

$$P'' = k_1k_2P + (1 - k_1k_2)O$$

Assim, basta tomar, se for possível, o ponto O tal que essas equações sejam a mesma. Para isso, tome:

$$O = \frac{k_2(1 - k_1)O_1 + (1 - k_2)O_2}{1 - k_1k_2} = \frac{k_2(1 - k_1)}{1 - k_1k_2}O_1 + \frac{(1 - k_2)}{1 - k_1k_2}O_2$$

Esta equação não depende de algum ponto P. Veja ainda que a soma dos coeficientes de O_1e de O_2 é igual a 1. Os pontos com essa propriedade são os pontos sobre a reta O_1O_2. Assim, por fim, temos a homotetia e o centro dela O está sobre a reta O_1O_2.

Observação: Os sinais das razões das homotetias influenciam? Não. Essa prova serve para quaisquer duas homotetias, exceto no caso da composição ser uma translação. Porém, lembre-se que se os sinais de k_1 e k_2 são ambos positivos ou ambos negativos teremos a homotetia resultante também direta. Mas se uma é negativa e outra positiva a composição também terá razão negativa. Desse modo, nas homotetias mostradas sempre tem um número de par de homotetias de razão negativa.

Exemplo 4: Seja Ω o circuncírculo do triângulo ABC e seja ω_a a circunferência tangente aos segmentos CA e AB e à circunferência Ω. Defina ω_b e ω_c de maneira análoga. Sejam A', B' e C' os pontos de tangência de ω_a, ω_b e ω_c com Ω. Prove que as retas AA', BB' e CC' concorrem em um ponto sobre a reta OI.

Problemas

1. a) Prove que o incentro I, o baricentro G e o ponto de Nagel N são colineares e ainda que $\frac{NG}{GI} = 2$.
b) Prove que o centro de homotetia direta do incírculo no circuncírculo é o conjugado isogonal do ponto Nagel.
c) Prove que o centro de homotetia inversa do incírculo no circuncírculo é conjugado isogonal do ponto de Gergonne.

2. (IMO/1981) Três círculos congruentes têm um ponto comum O e estão no interior de um triângulo. Cada círculo é tangente a dois lados do triângulo. Prove que o incentro e o circuncentro do triângulo e o ponto O são colineares.

3. (IMO/1982) Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo escaleno com lados a_1, a_2 e a_3 (a_i é o lado oposto a A_i). Seja M_i o ponto médio do lado a_i e T_i o ponto onde o incírculo do triângulo toca o lado a_i, para i = 1, 2, 3. Seja S_i o simétrico de T_i em relação à bissetriz interna do ângulo A_i. Prove que as retas M_1S_1, M_2S_2 e M_3S_3 são concorrentes.

4. (Banco da IMO/2007) As diagonais do trapézio $ABCD$ cortam-se no ponto P. O ponto Q está na região determinada pelas retas paralelas BC e AD tal que $\angle AQD = \angle CQB$ e a reta CD corta o segmento PQ. Prove que $\angle BQP = \angle DAQ$.

5. (Balcânica/90) Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam A_1, B_1 e C_1 os pés das suas alturas. O incírculo de $A_1B_1C_1$ tangencia os lados nos pontos A_2, B_2 e C_2. Prove que as retas de Euler dos triângulos ABC e $A_2B_2C_2$ coincidem.

6. (OBM/2012) Dado um triângulo ABC, o *exincentro* relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de $\angle B$ e $\angle C$. Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A, B e C, respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de I_BI_C, I_CI_A e I_AI_B, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente.

7. (OBM/2014) Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω. O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2, respectivamente. Seja r_A a reta A_1A_2. Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ. Prove que o incentro de XYZ, o circuncentro de XYZ e I são colineares.

8. (OBM/2017) No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

9. (HIB/99) Seja ABC um triângulo não-equilátero com seu incírculo tocando BC, CA e AB em A_1, B_1 e C_1, respectivamente, e seja H_1 o ortocentro do triângulo $A_1B_1C_1$. Prove que H_1 está sobre a reta passando pelo incentro e circuncentro do triângulo ABC.

10. (Bulgária TST/2007) Seja I o incentro do triângulo não isósceles ABC. Sejam $A_1 = AI \cap BC$ e $B_1 = BI \cap AC$. Seja r_A a reta por A_1 paralela a AC e r_B a reta por B_1 paralela a BC. Sejam $A_2 = r_A \cap CI$ e $B_2 = r_B \cap CI$. Sejam $N = AA_2 \cap BB_2$ e M o ponto médio de AB. Se $CN || IM$ ache a razão $\frac{CN}{IM}$.

11*. (Rússia/2008) Dado um quadrilátero convexo $ABCD$. As semirretas BA e CD se intersectam no ponto P e as semirretas BC e AD se intersectam no ponto Q. O ponto H é a projeção ortogonal de D sobre a reta PQ. Prove que o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível se e somente se o ângulo entre as tangentes de H ao incírculo do triângulo ADP é igual ao ângulo entre as tangentes de H ao incírculo do triângulo CDQ.

12. (Banco IMO/2006) Seja $ABCD$ um trapézio com lados paralelos $AB > CD$. Os pontos K e L sobre os segmentos AB e CD, respectivamente, tal que $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Suponha que existem pontos P e Q no segmento KL tal que $\angle APB = \angle BCD$ e $\angle CQD = \angle ABC$. Prove que P, Q, B e C são concíclicos.

13. (IMO/2011) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo Γ. Seja r uma reta tangente a Γ e r_a, r_b e r_c as retas obtidas refletindo r em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Mostre que o circuncírculo do triângulo formado por r_a, r_b e r_c é tangente ao círculo Γ.

14. Seja ABC um triângulo e T_a o ponto de tangência do incírculo com o lado BC e M_a o ponto médio da altura por A do triângulo ABC. Defina T_b, T_c, M_b e M_c de maneira análoga. Prove que T_aM_a, T_bM_b e T_cM_c são concorrentes.

15*. (Rússia/2000) Considere duas circunferências tangentes internamente no ponto N e sejam AB e BC duas cordas da circunferência maior que são tangentes a circunferência menor nos pontos K e M, respectivamente. Sejam Q e P os pontos médios dos arcos AB e BC que contém o ponto N, respectivamente. Os circuncírculos de BQK e BPM se intersectam em B e B_1. Prove que o quadrilátero BPB_1Q é um paralelogramo.

16. (Sharygin/2012) Uma circunferência ω com centro I é inscrita em um segmento circular formado por um arco e pela corda AB. O ponto M é o ponto médio desse arco AB e o ponto N é o ponto médio do arco complementar desse arco. As tangentes por N a ω tangenciam nos pontos C e D. Os lados opostos BC e AD do quadrilátero convexo $ABCD$ se intersectam em X e as diagonais de $ABCD$ se intersectam em Y. Prove que os pontos X, Y, I e M são colineares.

17. (Romênia TST/2007) Dado um triângulo ABC, sejam Γ_A uma circunferência tangente aos lados AB e AC, Γ_B uma circunferência tangente aos lados BC e BA e Γ_C tangente aos lados CA e CB. Suponha que Γ_A, Γ_B e Γ_C são tangente duas a duas. Suponha que D é o ponto de tangência entre Γ_B e Γ_C e E e F são definidos de maneira análoga. Prove que as retas AD, BE e CF são concorrentes.

18. (Banco da IMO/2007) O ponto P pertence ao lado AB do quadrilátero convexo $ABCD$. Seja ω o incírculo do triângulo CPD e I o seu incentro. Suponha que ω é tangente aos incírculos dos triângulos APD e BPC nos pontos K e L, respectivamente. As retas AC e BD se encontram em E e as retas AK e BL se encontram em F. Prove que os pontos E, I e F são colineares.

19*. (China/2013) Os círculos ω_1, ω_2 e ω_3 não se intersectam entre si e tangenciam internamente a circunferência Ω nos pontos A, B e C, respectivamente. Sejam r_1, r_2 e r_3 tangentes externas comuns aos três pares de círculos (ω_2,ω_3), (ω_3,ω_1) e (ω_1,ω_2). Sejam $X = r_2 \cap r_3$, $Y = r_1 \cap r_3$ e $Z = r_1 \cap r_2$. Prove que AX, BY e CZ concorrem em um ponto sobre a reta OI onde I é o incentro do triângulo XYZ e O é o centro de Ω.