13ª OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
República Dominicana 1998

Primeiro dia
Duração da prova: 4h e 30minutos.

PROBLEMA 1

São dados 98 pontos sobre uma circunferência. Maria e José jogam alternadamente da seguinte maneira: cada um deles traça um segmento unindo dois dos pontos dados que não tenham sido unidos entre si anteriormente. O jogo termina quando os 98 pontos tenham sido usados como extremos de um segmento pelo menos uma vez. O vencedor é a pessoa que faz o último traço. Se o José começa o jogo, quem pode garantir a sua própria vitória?

PROBLEMA 2

A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. AD corta a circunferência num segundo ponto Q. Demonstrar que a reta EQ passa pelo ponto médio de AF se e somente se $\overline{AC} = \overline{BC}$.

PROBLEMA 3

Encontrar o menor número natural n com a seguinte propriedade: entre quaisquer n números distintos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 999\}$ pode-se escolher quatro números diferentes a, b, c, d, tais que $a + 2b + 3c = d$.

13ª OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

República Dominicana 1998

Segundo dia
Duração da prova: 4h e 30minutos.

PROBLEMA 4

Em volta de uma mesa redonda estão sentados representantes de n países ($n \geq 2$), satisfazendo a seguinte condição: se duas pessoas são do mesmo país, então, seus respectivos vizinhos da direita não podem ser de um mesmo país. Determinar, para cada n, o número máximo de pessoas que pode haver em volta da mesa.

PROBLEMA 5

Encontrar o maior valor possível n para que existam pontos distintos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ no plano, e números reais $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de modo que a distância entre quaisquer dois pontos diferentes P_i e P_j seja $r_i + r_j$.

PROBLEMA 6

Seja λ a raiz positiva da equação $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Define-se a sucessão $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ por:

$$\begin{cases} x_o = 1 \\ x_{n+1} = [\lambda x_n], \text{ para } n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Encontrar o resto da divisão de x_{1998} por 1998.

Nota**:** $[x]$ indica a parte inteira de x, ou seja, $[x]$ é o único inteiro k tal que
$k \leq x < k + 1$.