The 6$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 1: Sexta-feira, 1 de março de 2013, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 1. Dado um inteiro positivo a, definimos a sequência de inteiros $x_1, x_2, \ldots$ por $x_1 = a$ e $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $n \geq 1$. Seja $y_n = 2^{x_n} - 1$. Determine o maior valor de k para o qual existe um inteiro positivo a tal que todos os números $y_1, \ldots, y_k$ são primos.

Problema 2. Existe um par (g, h) de funções $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a única função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f(g(x)) = g(f(x))$ e $f(h(x)) = h(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é a função identidade $f(x) \equiv x$?

Problema 3. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um circulo ω. As retas AB e CD cortam-se em P, as retas AD e BC cortam-se em Q e as diagonais AC e BD cortam-se em R. Seja M o ponto médio de PQ e K o ponto de interseção do segmento MR e do círculo ω. Prove que o circuncírculo do triângulo KPQ e ω são tangentes.

Cada problema vale 7 pontos.
Duração da prova: $4\frac{1}{2}$ horas.

The 6^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 2: Sábado, 2 de Março de 2013, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 4. Sejam P e P' duas regiões quadrilaterais convexas no plano (regiões incluem suas bordas) cuja interseção não é vazia. Seja O um dos pontos de interseção de P e P'. Suponha que, para toda reta ℓ passando por O, o segmento de reta determinado pela interseção de ℓ e P tem comprimento maior do que o segmento de reta determinado pela interseção de ℓ e P'. É possível que a razão entre as áreas de P' e P seja maior do que 1,9?

Problema 5. Dado um inteiro $k \geq 2$, seja $a_1 = 1$ e, para cada inteiro $n \geq 2$, seja a_n o menor $x > a_{n-1}$ tal que

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor .$$

Prove que todo primo aparece na sequência $a_1, a_2, \ldots$.

Problema 6. $2n$ peças diferentes são colocadas nos vértices de um polígono regular com $2n$ vértices, uma peça em cada vértice. Um *movimento* consiste em escolher um lado do polígono e trocar de posição as duas peças nas extremidades desse lado. Suponha que, após uma quantidade finita de movimentos, todo par de peças foi trocado de posição exatamente uma vez. Prove que algum lado nunca foi escolhido.

Cada problema vale 7 pontos.
Duração da prova: $4\frac{1}{2}$ horas.