XXI SEMANA OLÍMPICA - NU
MÉTODOS ALGÉBRICOS EM COMBINATÓRIA

SAMUEL FEITOSA
samuelf@ufba.br

Problema 1. (Olimpíada Búlgara) Sejam m e n inteiros maiores que 1. Seja S um conjunto com n elementos, e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ suconjuntos de S. Assuma que para quaisquer dois elementos x e y em S, existe um conjunto A_i tal que ou x está em A_i e y não está em A_i ou x não está em A_i e y está em A_i. Prove que $n \leq 2^m$.

Problema 2. (Olimpíada Iberoamericana) Sejam S um conjunto de n elementos e $S_1, S_2, \ldots, S_k$ subconjuntos de $S(k \geq 2)$, tais que cada um deles têm pelo menos r elementos. Demonstre que existem i e j, com $i \neq j$, tais que a quantidade de elementos em comum entre S_i e S_j é maior ou igual à $r - \dfrac{nk}{4(k-1)}$.

Problema 3. (IMO 1998) Num concurso há m candidatos e n juízes, onde $n \geq 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que:

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}\ ..$$

Problema 4. (Irã 1998) Sejam $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$$

é monótona para quaisquer $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Prove que existem $c_1.c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 5. (China 2002) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prove que existem conjuntos de índices disjuntos e não vazios $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ tais que

$$\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k \in J} A_k.$$

Problema 6. Em Impalândia existem 32 habitantes. Eles formam clubes satisfazendo as seguintes condições:

a) Cada clube possui um número ímpar de membros;

b) Quaisquer dois clubes possuem um número par de membros em comum.

Qual o número máximo de clubes formados?

Problema 7. Existem $2n$ pessoas numa festa. Cada pessoa tem um número par de amigos na festa. Prove que existem duas pessoas que possuem um número par de amigos em comum na festa.

Problema 8. Um conjunto T é chamado de par se possui um número par de elementos. Seja n um inteiro positivo par e sejam $S_1, S_2, \ldots, S_n$ subconjunttos pares do conjunto $[n]$. Prove que existem $i \neq j$ tais que $S_i \cap S_j$ é par.

Problema 9. (J. A. Bondy, 1972) Sejam $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos distintos de um conjunto X de n elementos. Prove que existe $x \in X$ tal que todos os conjuntos $A_i \backslash \{x\}$ são distintos.

Problema 10. (Desigualdade de Fisher) Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_m$ subconjuntos distintos de um conjunto de n elementos e tal que para todo $i \neq j$, $|C_i \cap C_j| = l$ onde $1 \leq l < n$. Prove que $m \leq n$.

Problema 11. Seja A uma matriz real quadrada que satisfaz $a_{ij} = t \geq 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} > t$ para todo i. Mostre que A é não singular.

Problema 12. Em Impalândia Reversa existe regras diferentes:

a) Cada clube possui um número par de membros;

b) Quaisquer dois clubes possuem um número ímpar de membros em comum.

Qual o número máximo de clubes formados?

Problema 13. Mostre que:

a) $rank(A \cdot B) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$;

b) $rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B)$.

Problema 14. Sejam J_m uma matriz $m \times m$ com 1 em todas as entradas e I_m a matriz identidade $m \times m$. Considere a matriz $J_m - I_m$.

a) Calcule o determinante de $J_m - I_m$.

b) Mostre que $rank(J_m - I_m)$ sobre $\mathbb{F}_2$ é m se m é par.

c) Mostre que $rank(J_m - I_m)$ sobre $\mathbb{F}_2$ é $m - 1$ se m é ímpar.

Problema 15. Seja A uma matriz $2n \times 2n$ com zeros na diagonal e ± 1 nas outras entradas. Mostre que A é não singular sobre $\mathbb{R}$.

Problema 16. Em Parlândia existem 32 habitantes. Eles formam clubes satisfazendo as seguintes condições:

a) Cada clube possui um número par de membros;

b) Quaisquer dois clubes possuem um número par de membros em comum.

Qual o número máximo de clubes nessa cidade?

Problema 17. Sejam X um conjunto finito e F uma família de subconjuntos próprios e distintos de X. Suponha que para todo par de elementos distintos em X, existe um único membro de F que contém ambos os elementos. Prove que $|F| \geq |X|$.

Problema 18. (Graham-Pollak, 1972) Se o conjunto das arestas de um grafo completo sobre n vértices é a união disjunta dos conjuntos de arestas de m grafos completos bipartidos então $m \geq n - 1$.

Problema 19. Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \mathbb{Z}$ funções definidas num conjunto arbitrário X. Suponhamos que existe um número primo p e elementos $x_1, x_2 \ldots, x_n \in X$ tais que $p \nmid f_i(x_i), \forall i$ e $p \mid f_i(x_j), \forall i \neq j$. Então $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.

Problema 20. Sejam $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinômio em n variáveis sobre $\mathbb{Q}$, $\Omega_1 = \{0, 1\}^n \subset \mathbb{Q}^n$ e $\Omega_2 = \{-1, 1\}^n \subset \mathbb{Q}^n$. Se f possui grau $\leq s$ então existem polinômios multilineares f_1 e f_2 de graus $\leq s$ tais que f_1 coincide com f em Ω_1 e f_2 coincide com f em Ω_2.

Problema 21. Sejam p um número primo e L um conjunto de s números inteiros. Suponha que $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto com n elementos tal que

i) $|A_i| \notin L \pmod p (1 \leq i \leq m)$;

ii) $|A_i \cap A_j| \in L \pmod p (1 \leq i < j \leq m)$;

Então
$$m \leq \sum_{j=0}^{s} \binom{n}{j}.$$

Problema 22. (Irã 2006.) Seja A uma coleção de vetores de comprimento n com elementos em $\mathbb{Z}_3$ com a propriedade que para quaisquer dois vetores distintos $a, b \in A$ existe alguma coordenada i tal que $b_i = a_i + 1 \pmod 3$. Prove que $|A| \leq 2^n$.

Definição 1. (Plano Projetivo) Dizemos que um conjunto S é um plano projetivo se existem subconjuntos $C_i \subset S$ que satisfazem as seguintes propriedades:

1. Se P e Q pertencem a S, um e somente um dos subconjuntos C_i contém P e Q.
2. A interseção de C_i e C_j consiste sempre de um único elemento, para todo $i \neq j$.
3. Existem pelo menos quatro elementos de S tais que, entre eles não haja três contidos em um dos conjuntos C_i.

Problema 23. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes em planos projetivos:

a) Existe uma reta que passa por exatamente $n+1$ pontos;

b) Existe um ponto que está contido em exatamente $n+1$ retas;

c) Todas as retas passam por exatamente $n+1$ pontos;

d) Todos os pontos estão contidos em exatamente $n+1$ retas;

e) Há exatamente n^2+n+1 retas;

f) O plano projetivo tem exatamente n^2+n+1 pontos (diz-se nesse caso que o plano projetivo tem ordem n).

Problema 24. (Olimpíada Iberoamericana)Temos um tabuleiro quadriculado de k^2-k+1 linhas e k^2-k+1 colunas, onde $k=p+1$ e p é um número primo. Para cada primo p, dê um método para distribuir números 0 e 1, um número em cada casa do tabuleiro, de modo que em cada linha haja exatamente k números 0, em cada coluna haja exatamente k números 0 e, além disso, não haja nenhum retângulo, de lados paralelos aos lados do tabuleiro, com números 0 em seus quatro vértices.

Problema 25. (São Petesburgo 2000) É possível selecionar 102 subconjuntos de 17 elementos de um conjunto de 102 elementos de modo que a interseção de quaisquer dois subconjuntos possui no máximo 3 elementos?

Referências

[1] Babai,L. , Frankl, P., Linear Algebra Methods in Combinatorics, University of Chicago; (1992).

[2] Kohayakawa, Y., Moreira, C.G., Tópicos em Combinatória Comtemporânea, Rio de Janeiro, IMPA; (2001).

[3] Po-Shen Loh, Algebraic Methods in Combinatorics, MOSP; (2009).

[4] Shine, C.Y, 21 Aulas de Matemática Olímpica, Rio de Janeiro, SBM; (2009).