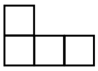
TABULEIROS

SEMANA OLÍMPICA 2018 – Nível 1

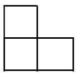
PROF.: ISRAEL DOURADO

01. Quando dois quadrados unitários adjacentes são removidos de um linha de um retângulo 2 x 3, a forma obtida é chamada de forma tipo **L**, conforme mostra a figura a seguir:



É possível cobrir completamente, sem superposição e sem transbordamento, um tabuleiro 8 x 8 utilizando 7 peças 2 x 2 e 9 peças do tipo **L** ?

02. Considere uma peça na forma de **L** apagando um dos 4 quadradinhos de um quadrado 2 x 2, conforme a figura a seguir:

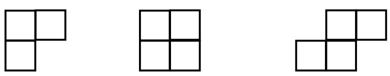


Usando algumas peças na forma de L, desejamos cobrir um tabuleiro 5 x 7, de modo que cada peça **L** cubra exatamente 3 quadradinhos, não podendo haver buracos no tabuleiro e nem transbordamento, mas superposições são permitidas. É possível que cada quadrado unitário do tabuleiro 5 x 7 seja coberto pelo mesmo número de peças do tipo **L** ? Justifique sua resposta. (RIOPLATENSE/2013)

03. Um tabuleiro 23 x 23 é coberto com peças do tipo 1 x 1, 2 x 2, e 3 x 3 sem superposição e sem transbordamento. No mínimo, quantas peças 1 x 1 foram utilizadas ?

04. Todas as casas de um tabuleiro ***m x n*** (m ≥ 3, n ≥ 3) são coloridas de vermelho ou azul. Duas casas adjacentes (com um lado em comum) são chamadas de um ***par olímpico*** se elas são de cores diferentes. Suponha que existem ***S*** pares olímpicos no tabuleiro. Explique como determinar se ***S*** é par ou ímpar e se essa paridade depende da coloração inicial do tabuleiro. (CHINA/2004)

05. Um tabuleiro 7 x 7 é cortado em figuras de três tipos:

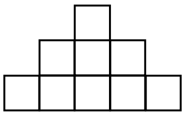


(1) (2) (3)

Prove que dentre essas figuras há exatamente uma consistindo de quatro quadradinhos.
(OLIMPÍADA DE MAIO/2008)

06. Temos um tabuleiro 1995 x 1995. A cada uma de suas 1995^2 casas, associamos um dos números +1 ou –1. Em seguida, associamos a cada linha o produto dos números das casas dessa linha, e a cada coluna fazemos o mesmo.
(i) Se T é a soma dos números associados às linhas, colunas e escritos nas casas, prove que T ≠ 0.
(ii) Se S é a soma dos números associados às linhas e às colunas, prove que S ≠ 0. (OBM/1995)

06. João possui um tabuleiro ***n x n*** e uma grande quantidade de peças do tipo a seguir, formadas por quadrados ***1 x 1***:



Sua intenção é preencher o tabuleiro, sem deixar falhas, usando as peças. Não pode haver sobreposição e não pode haver transbordamento. Determine para quais valores de ***n*** isso é possível. (OBM/1995)

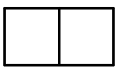
07. É possível cobrir, sem superposição e sem transbordamento, um tabuleiro 11 x 12 utilizando exatamente 9 retângulos 1 x 6 ou 1 x 7 ?

08. Em um tabuleiro 100 x 100 cada casa está pintada de preto ou branco. As casas das quinas são pretas e todas as demais casas dos bordos são brancas. Dizemos que duas casas são vizinhas se possuem ao menos um vértice em comum. Em cada casa escrevemos o número que é igual à quantidade de casas pretas vizinhas que tem esta casa. É possível que a soma de todos os números escritos no tabuleiro seja igual a 2000? (RIOPLATENSE/2000)

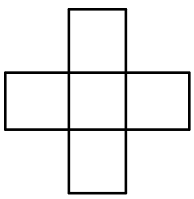
09. Um tabuleiro 8 x 8 é coberto por dominós sem superposição e sem transbordamento. Um dominó é dito horizontal se seu maior lado é paralelo ao lado horizontal do tabuleiro. Um dominó horizontal é preto-branco se ele cobre uma casa preta e uma branca da esquerda para a direita, respectivamente, e branca-preta, caso contrário. Prove que entre os dominós usados para cobrir o tabuleiro, o número de dominós horizontais preto-branco é igual ao número de dominós horizontais branco-preto. (BIELORRÚSSIA/1996)

10. Em um tabuleiro 10 x 10 são escritos os números de 1 a 100. De cada linha nós selecionamos o 3º maior número. Prove que a soma destes números não é menor do que a soma dos números de alguma linha. (SÃO PETERSBURGO/1998)

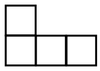
11. Pode um tabuleiro 75 x 75 ser coberto por dominós (peças 2 x 1) e cruzes (peças de 5 casas, consistindo de um quadrado e seus quatro vizinhos) sem superposição nem transbordamento ?



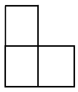
Dominó (1 x 2)



Cruz

12. Quando dois quadrados unitários adjacentes são removidos de uma linha de um retângulo 2 x 3, nós obtemos uma peça num formato de um **L**, conforme a figura a seguir: 
   a) Suponha que um tabuleiro ***m x n*** (m, n > 1) tenha uma cobertura perfeita com peças do tipo **L**. Mostre que ***m.n*** é múltiplo de 8.
   b) Ache todos os inteiros positivos m, n (m, n > 1) tais que um tabuleiro ***m x n*** pode ser perfeitamente coberto exclusivamente com peças do tipo **L**.

13. Determine todos os **m**, **n** inteiros positivos, tais que um tabuleiro ***m x n*** pode ser completamente preenchido por peças de 3 quadrados unitários como a da figura abaixo:



(TESTE CONE SUL/2001)

14. Em um tabuleiro ***n x n*** (n ≥ 4) cada casa é preenchida com um +1 ou um -1. O produto de **n** números de linhas e colunas distintas é chamado de um ***termo-básico***. Seja **S** a soma de todos os ***termos-básicos*** que podemos formar no tabuleiro. Prove que para qualquer configuração dos números do tabuleiro, **S** é divisível por 4. (CHINA/1989)

15. Prove que é possível colocar distintos quadrados perfeitos em cada casa de um tabuleiro ***m x n*** de tal modo que a soma de todos os números de cada linha e a soma de todos os números de cada coluna sejam também quadrados perfeitos.