Algoritmos e a questão 5 da IMO/2017

Semana Olímpica/2018

Prof. Armando Barbosa

Maceió, 25 de janeiro de 2018

1 Exercícios resolvidos no material

Problema 1 *(Rússia/1998)* Um labirinto é um tabuleiro 8×8, com alguns quadradinhos adjacentes 1×1 separados por muros, é tal que quaisquer dois quadradinhos são conectados por um caminho que não passa por cima de qualquer muro. Dado um comando *CIMA, BAIXO, DIREITA* ou *ESQUERDA*, um peão pode dar um passo na direção correspondente, a menos que ele encontre um muro ou uma borda do tabuleiro. Deus escreve um programa que consiste de uma sequência finita de comandos e entrega ele para o Diabo, que então pode construir um labirinto e colocar um peão em um dos quadradinhos. Deus pode escrever um programa que garanta que o peão vai visitar todos os quadradinhos 1×1 do tabuleiro, ainda que o Diabo se esforce para impedir isso?

Problema 2 Prove que a equação

$$3x^2 - 11y^2 = 1$$

possui infinitas soluções inteiras positivas.

Problema 3 *(Cone Sul/TST - 2017)* Tina escreve, na lousa, o produto a seguir:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Tina pode escolher alguns números, ou todos se ela quiser, e colocar um sinal de exclamação ao lado, transformando tal número em fatorial. Para quais $n \geqslant 2$, ela pode colocar sinais de excalmação de tal forma que o produto resultante seja um quadrado perfeito?
Por exemplo, para $n = 4$, temos que $1 \cdot 2! \cdot 3 \cdot 4! = 144 = 12^2$.

Problema 4 *(OBM/2011)* Existem 2011 inteiros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2011}$ tais que, para todo $1 \leqslant i < j \leqslant 2011$, $mdc(a_i, a_j) = a_j - a_i$?

Problema 5 *(IMO/2017)* Seja $N \geqslant 2$ um inteiro dado. Um conjunto de $N(N+1)$ jogadores de futebol, todos de diferentes alturas, colocam-se em fila. O treinador deseja retirar $N(N-1)$ jogadores desta fila, de modo que a fila que sobra formada pelos $2N$ jogadores restantes satisfaça as N condições seguintes:

(1) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais altos.

(2) Não resta ninguém entre o terceiro jogador mais alto e o quarto jogador mais alto.

$\vdots$

(N) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais baixos.

Demonstre que isto é sempre possível.

2 Outros exercícios do material

Problema 15 *(Romênia/TST - 2012)* Encontre o número máximo de reis que podem ser colocados num tabuleiro de xadrez 12×12 tal que cada rei ataca exatamente um dos outros reis.

Problema 17 *(Sérvia/2017)* Encontre o número máximo de rainhas que podem ser colcoadas num tabuleiro de xadrez 2017×2017 tal que cada rainha ataca no máximo uma outra rainha.