Circunferências tangentes entre si e o Lema da estrela da morte

Semana Olímpica/2018 - Nível 2

Prof. Armando Barbosa

Maceió, 25 de janeiro de 2018

1 Exercícios resolvidos no material

Problema 1 *(México/2016)* Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências tangentes externamente no ponto S de tal forma que o raio de Γ_2 é o triplo do raio de Γ_1. Seja ℓ uma reta tangente a Γ_1 no ponto $P \neq S$ e a Γ_2 no ponto $Q \neq S$. Seja T um ponto em Γ_2 tal que QT é diâmetro de Γ_2. Seja R o ponto onde a bissetriz interna do $\angle SQT$ encontra o segmento ST. Prove que $QR = RT$.

Problema 2 Na questão anterior, prove que os pontos P, S e T são colineares.

Problema 3 *(OBM/2015 - N2)* Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As retas AB e CD cortam-se em E e as retas BC e AD cortam-se em F. Sejam P e Q os pés das perpendiculares de E sobre as retas AD e BC, respectivamente, e sejam R e S os pés das perpendiculares de F sobre as retas AB e CD, respectivamente. As retas ER e FS cortam-se em T.

a) Mostre que há uma circunferência que passa pelos pontos E, F, P, Q, R e S.

b) Prove que (RST) é tangente a (QRB).

Lema: *(Estrela da morte)* Dadas duas circunferências tangentes internamente entre si em A. seja $\overline{BC}$ uma corda da maior circunferência tangente a menor no ponto D. Então, temos que $\angle BAD = \angle CAD$.

2 Outros exercícios no material

Problema 4 *(Balkan/2012)* Sejam A, B e C pontos numa circunferência Γ de centro O, tais que $\angle ABC > 90°$. Seja D o ponto de interseção da reta AB com a reta, perpendicular a AC, que passa por C. Seja ℓ a reta que passa por D e é perpendicular a AO. Seja E o ponto de interseção de ℓ com a reta AC. Seja F a interseção de ℓ com Γ, que fica entre D e E. Prove que os circuncírculos dos triângulos BFE e CFD são tangentes em F.

Problema 5 *(Bielorússia/2016)* Seja P o ponto onde o A-exincírculo ω_A do triângulo ABC toca o lado $\overline{BC}$. Sejam I_1 e I_2 os centros do A-exincírculos em relação aos triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$, respectivamente. Prove que $(I_1 I_2 P)$ é tangente a ω_A.