Circunferências tangentes entre si
e o Lema da estrela da morte

Semana Olímpica/2018 - Nível 2

Prof. Armando Barbosa

Maceió, 25 de janeiro de 2018

Em algumas questões de olimpíada de matemática, aparecem questões que envolvam ou peçam para demonstrar que duas circeunferências são tangentes. O objetivo desse material será apresentar ideas que possam auxiliar o aluno a resolver questões com tal assunto. Basicamente, há duas formas de provar que duas circunferências são tangentes: usando os centros ou usando a reta tangente em comum. Nesse material, veremos cada uma delas.

Sobre circunferências tangentes entre si, há um lema conhecido bastante conhecido que cai com alguma frequência: o lema da estrela da morte. Aproveitaremos esse material para apresentar tal lema.

Dessa forma, para alcançar os objetivos desse material, ele está dividido nas seguintes seções:

1. Provando que duas circunferências são tangentes entre si usando os centros
2. Provando que duas circunferências são tangentes entre si usando a reta tangente em comum
3. Lema da estrela da morte
4. Mais exercícios

Antes de seguir, vamos deixar registrado que adotaremos a notação: (ABC) para se referir à circunferência que passa pelos pontos A, B e C, ou seja, à circunferência circunscrita do triângulo $\triangle ABC$.

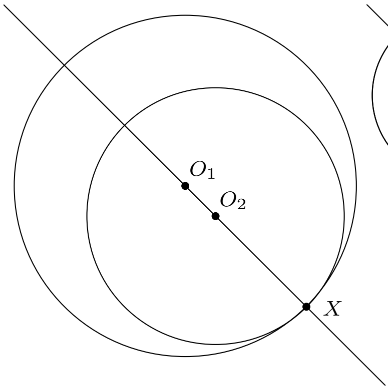
Sem mais delongas, vamos ao que interessa.

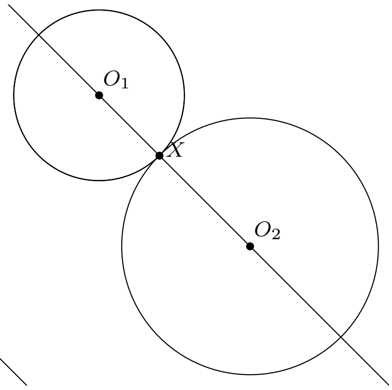
1 Provando que duas circunferências são tangentes entre si usando os centros

A primeira forma para provar a tangência entre duas circunferências é usando os centros delas. Neste caso, a ideia principal é que:

Duas circunferências são tangentes $\Leftrightarrow$ os centros delas são colineares com o ponto de interseção delas.

Para entender melhor a ideia, observemos o desenho a seguir:





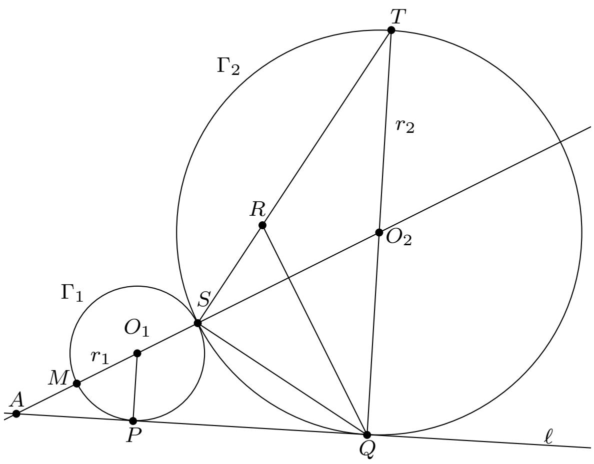
A prova do fato acima é simples: uma vez que as circunferências são tangentes entre si, então há somente um ponto X pertencente a ambas. A reta tangente pelo ponto X forma ângulo de $90°$ com as retas que ligam P a cada um dos centros, podendo então concluir que essas retas são, na verdade, a mesma reta.

Continuando nossos estudos, vejamos uma aplicação dessa ideia.

Problema 1 *(México/2016)* Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências tangentes externamente no ponto S de tal forma que o raio de Γ_2 é o triplo do raio de Γ_1. Seja ℓ uma reta tangente a Γ_1 no ponto $P \neq S$ e a Γ_2 no ponto $Q \neq S$. Seja T um ponto em Γ_2 tal que QT é diâmetro de Γ_2. Seja R o ponto onde a bissetriz interna do $\angle SQT$ encontra o segmento ST. Prove que $QR = RT$.

Solução: Sejam O_1, O_2, r_1 e r_2 os centros de Γ_1 e $\Gamma 2$ e os raios de Γ_1 e Γ_2, respectivamente. Pelos dados do enunciado, temos que: $r_2 = 3r_1$.

Conforme vimos nessa seção, S é colinear com O_1 e O_2. Seja A o ponto de encontro de ℓ com O_1 e O_2. Seja $M \neq S$ o segundo ponto de encontro de O_1O_2 e Γ_1. Façamos um desenho para analisar o problema.



Daí, notemos que $O_1P \parallel O_2Q$, pois ambos são perpendiculares a ℓ. Por consequência, temos que $\angle AO_1P = \angle AO_2Q$. Com isso, podemos concluir que:

$$\angle AO_1P = \angle AO_2Q \Rightarrow \widehat{PM} = \widehat{QS} \Rightarrow 2 \cdot \angle APM = 2 \cdot \angle AQS$$
$$\Rightarrow \angle APM = \angle AQS \Rightarrow \overline{PM} \parallel \overline{QS} \Rightarrow \triangle APM \sim \triangle AQS$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{QS}} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QS}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{3 \cdot \overline{AM} = \overline{AS}}$$

Além disso, sabemos que $\overline{AS} = \overline{AM} + 2r_1$. Daí, temos que:

$$3 \cdot \overline{AM} = \overline{AS} = \overline{AM} + 2r_1 \Rightarrow 2\overline{AM} = 2r_1 \Rightarrow \overline{AM} = r_1 \text{ e } \boxed{\overline{AS} = 3r_1 = r_2}$$

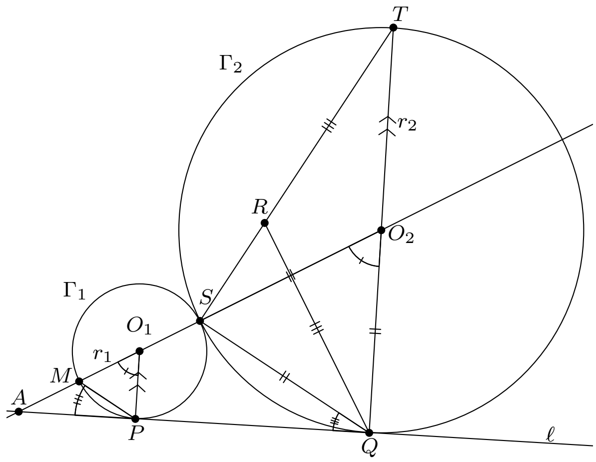
Como $\overline{SO_2} = r_2 = \overline{AS}$, então podemos concluir que $\overline{QS}$ é mediana da hipotenusa do triângulo retângulo AQO_2. Portanto, podemos concluir que:

$$r_2 = \overline{SO_2} = \overline{O_2Q} = \overline{QS} \Rightarrow \boxed{\triangle SO_2Q \text{ é equilátero}} \Rightarrow$$

$$\overline{QR} \text{ é bissetriz do ângulo } \angle SQO_2 \Rightarrow \boxed{\angle RQT = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ}$$

$$\widehat{SQ} = 60^\circ \Rightarrow \boxed{\angle RTQ = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ}$$

$$30^\circ = \angle RQT = \angle RTQ \Rightarrow \triangle RQT \text{ é isósceles em } R \Rightarrow \boxed{\overline{QR} = \overline{RT}}$$



■

Um aluno observador pode perceber que os pontos P, S e T são colineares. Para treinar um pouco, deixemos esse exerício como tarefa:

Problema 2 Na questão anterior, prove que os pontos P, S e T são colineares.

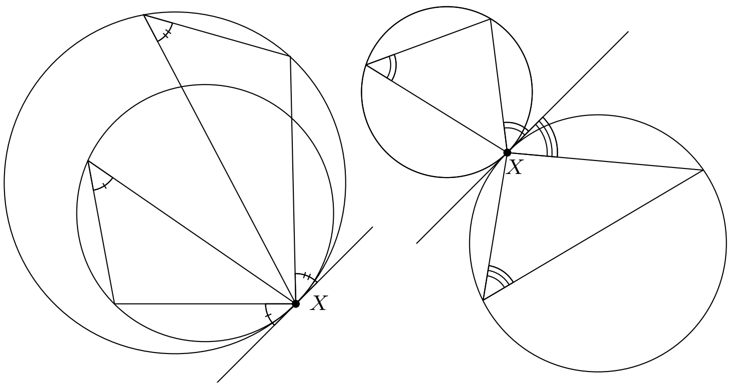
A colinearidade entre os centros e os pontos de tangência gera outros resultados úteis. Por exemplo, o ponto A na solução apresentada é o centro da uma homotetia que leva Γ_1 em Γ_2. No entanto, há questões em que provar essa colinearidade é bem difícil. Nestes casos, podemos optar pela segunda forma de provar a tangência entre circurnferências, através de uma reta "esperta"e marcação de ângulos. Esse assunto é o tema da próxima seção.

2 Provando que duas circunferências são tangentes entre si usando a reta tangente em comum

A segunda forma para provar a tangência entre duas circunferências é usando a reta tangente em comum. Neste caso, a ideia principal é que:

Duas circunferências são tangentes $\Leftrightarrow$ há uma reta tangente a ambas por um mesmo ponto.

Para entender melhor, observemos o desenho a seguir:



A prova do fato acima é simples: se duas circunferências são tangentes entre si, então há exatamente um ponto X que pertence a ambas. A tangente que passa por este ponto X a uma das circunferências será, portanto, tangente também a outra.

Avançando nossos estudos, vejamos uma aplicação dessa ideia.

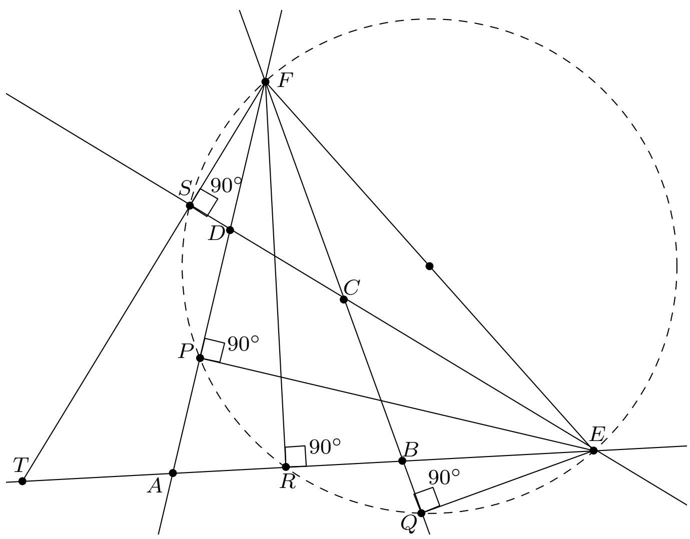
Problema 3 *(OBM/2015 - N2)* Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As retas AB e CD cortam-se em E e as retas BC e AD cortam-se em F. Sejam P e Q os pés das perpendiculares de E sobre as retas AD e BC, respectivamente, e sejam R e S os pés das perpendiculares de F sobre as retas AB e CD, respectivamente. As retas ER e FS cortam-se em T.

a) Mostre que há uma circunferência que passa pelos pontos E, F, P, Q, R e S.

b) Prove que (RST) é tangente a (QRB).

Solução:

a) Fazendo um bom desenho, temos que



Daí, notemos que:

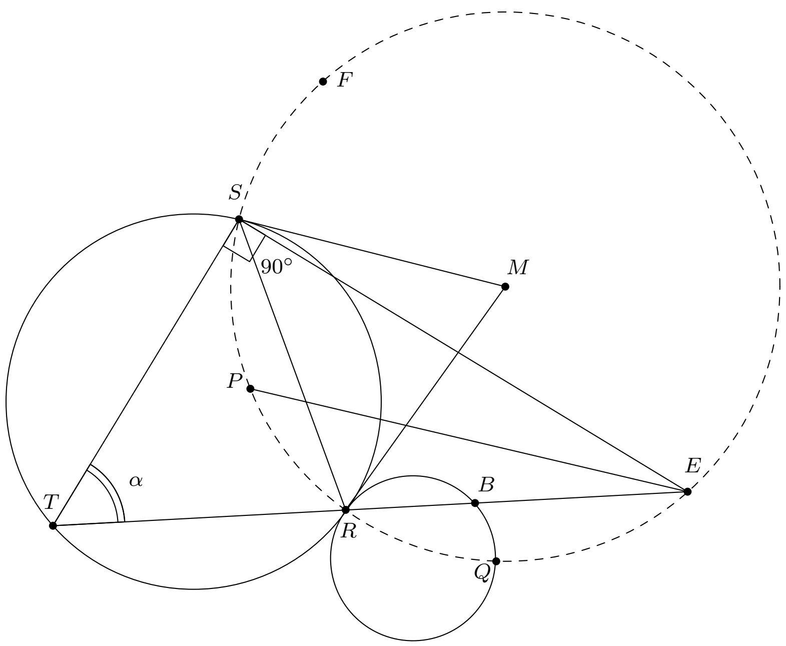
$$\angle FSE = \angle FPE = \angle FRE = \angle FQE = 90^\circ$$

Daí, podemos concluir que a circunferência de diâmetro $\overline{EF}$ passa pelos pontos E, F, P, Q, R e S, concluindo assim esse item.

b) Como queremos provar a tangência entre duas circunferências que passam por R, então basta provar que há uma reta que passa por R que é tangente a ambas. Analisando novamente o desenho (aqui, vale ressaltar a importância de um bom desenho), podemos conjecturar (termo matemático elegante para "chutar") que essa reta é a reta que conecta R ao ponto médio de $\overline{EF}$ que é o centro da circunferência do item anterior. Daí, provemos isso em forma de lema:

Lema: Sendo M o ponto médio da reta $\overline{EF}$, temos que a reta RM é tangente às circunferências (RST) e (QRB).

Prova: Melhorando o desenho do item anterior, conectando R e M, temos que:



Seja $\angle RTS = \alpha$. Nosso objetivo será provar que $\angle MRS = \alpha$, pois isso implicaria que $\angle MRS$ seria ângulo de segmento e, por consequência, RM seria tangente a (RST).

Pelo triângulo TSE, temos que $\angle SET = \angle SER = 90^\circ - \alpha$ e, por consequência, podemos concluir que $\overset{\frown}{RS} = 2 \cdot (90^\circ - \alpha)$.

Ligando MS, temos que o triângulo $\triangle MRS$ é isósceles em M. Daí, podemos concluir que:

$$\angle SMR = \overset{\frown}{RS} = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle MSR = \angle MRS = \frac{1}{2} \cdot (180 - 2\alpha)$$
$$\Rightarrow \boxed{\angle MRS = \alpha = \angle RTS}$$

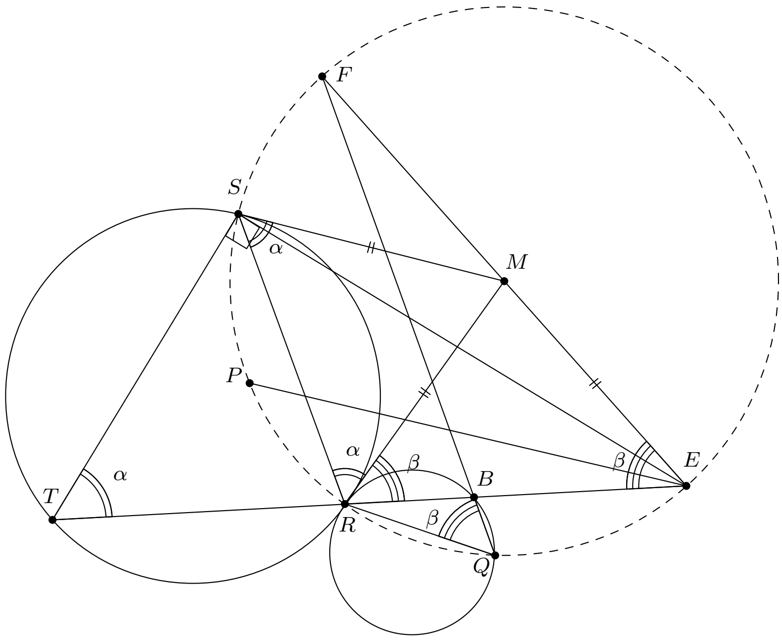
Logo, RM é tangente a (RST).

Para provar que RM é tangente a (QRB) é mais simples ainda: analogamente, basta provar que $\angle RQB = \angle BRM$.

Sendo $\beta = \angle RQB$, temos que:

$$\angle RQB = \angle RQF = \beta$$
$$RQEF \text{ é cíclico } \Rightarrow \angle RQF = \angle REF = \angle REM = \beta$$
$$\triangle REM \text{ é isósceles em } R \Rightarrow \angle REM = \angle ERM = \angle\angle BRM = \beta = angleRQB$$

Portanto, RM é tangente a (QRB) e, como RM também é tangente a (RST), então tais circunferências são tangentes entre si, sendo RM a tangente comum entre ambas.



■

Notemos que, na questão anterior, trabalhar com os centros de (RST) e (QRB) seria bem complicado, enquanto na questão inicial, analisar a reta tangente em comum não facilitaria muito.

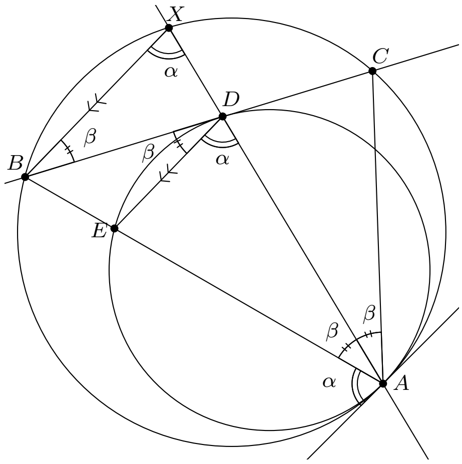
Para se familiarizar mais com o tema, vejamos o famoso lema da estrela da morte.

3 Lema da estrela da morte

Uma aplicação clássica de círculos tangentes internamente entre si é o lema da estrela da morte. Vejamos tal lema e sua respectiva demonstração.

Lema: *(Estrela da morte)* Dadas duas circunferências tangentes internamente entre si em A. seja $\overline{BC}$ uma corda da maior circunferência tangente a menor no ponto D. Então, temos que $\angle BAD = \angle CAD$.

Prova: Seja X o ponto de encontro do prolongamento de AD por D a circunferência grande. Seja E o ponto de interseção de AB com a circunferência menor. Façamos um bom desenho:



Seja α o ângulo de segmento formado pela tangente que passa por A, em relação ao $\overparen{AB}$. Daí, temos que:

$$\angle EDA = \angle BXA = \alpha \Rightarrow \boxed{DE \parallel XB}$$

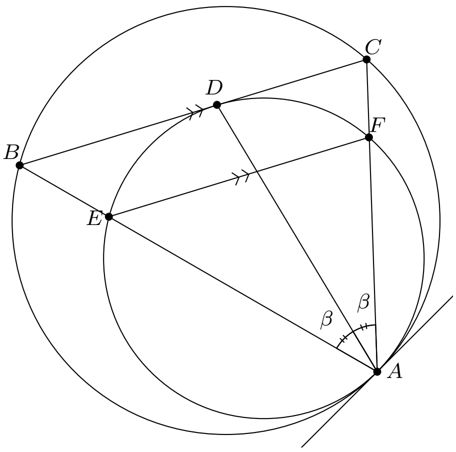
Seja $\beta = \angle BAD$. Daí, temos que:

$$BD \text{ é tangente } \Rightarrow \angle EDB = \beta$$
$$DE \parallel XB \Rightarrow \angle EDB = \angle DBX = \angle CBX = \beta$$
$$ABXC \text{ é cíclico } \Rightarrow \angle CBX = \angle CAX = \boxed{\angle CAD = \beta = \angle BAD}$$

■

Sobre o mesmo lema, há uma prova mais imediata usando homotetia que será apresentada a seguir:

Prova: *(Com homotetia)* Comecemos por um bom desenho:



Liguemos o ponto A aos pontos B, C e D. Sejam E e F os pontos de interseção de AB e AC com a circunferência menor, respectivamente.

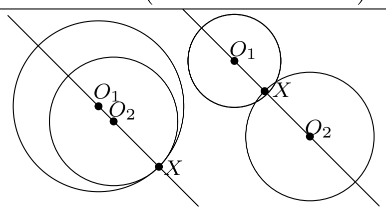
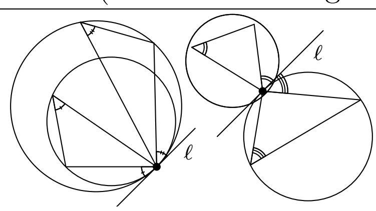
Por homotetia, sabemos que A é o centro de homotetia $\mathcal{H}$ que leva a circunferência pequena na grande. Essa homotetia leva $\overline{EF}$ no segmento $\overline{BC}$ e, por isso, temos que $EF \parallel BC$. Daí, analisando a circunferência menor, podemos concluir que:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \widehat{DE} = \widehat{DF} \Rightarrow \angle EAD = \angle FAD \Rightarrow \boxed{\angle BAD = \angle CAD}$$

■

Conclusão

Conforme vimos ao longo desse material, há basicamente duas formas de provar que duas circunferências são tangentes entre si. Podemos, a título ilustrativo fazer uma tabela comparando as duas formas.

Forma 1 (usando centros)	Forma 2 (usando reta tangente)
	
O_1, X, O_2 colineares	reta ℓ que gera os ângulos bons
Dificuldade principal: trabalhar colinearidade com centro pode ser difícil	Dificuldade principal: saber quem é a reta ℓ que resolve
Forma menos comum	Forma mais comum

Em outros materiais mais avançados de geometria, podemos encontrar outras ideias que podem ser aplicadas a circunferências tangentes entre si como, por exemplo, inversão.

4 Mais exercícios

Problema 4 *(Balkan/2012)* Sejam A, B e C pontos numa circunferência Γ de centro O, tais que $\angle ABC > 90°$. Seja D o ponto de interseção da reta AB com a reta, perpendicular a AC, que passa por C. Seja ℓ a reta que passa por D e é perpendicular a AO. Seja E o ponto de interseção de ℓ com a reta AC. Seja F a interseção de ℓ com Γ, que fica entre D e E. Prove que os circuncírculos dos triângulos BFE e CFD são tangentes em F.

Problema 5 *(Bielorússia/2016)* Seja P o ponto onde o A-exincírculo ω_A do triângulo ABC toca o lado $\overline{BC}$. Sejam I_1 e I_2 os centros do A-exincírculos em relação aos triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$, respectivamente. Prove que (I_1I_2P) é tangente a ω_A.

Problema 6 *(Cone Sul/TST - 2017)* Seja k o circuncírculo do triângulo ABC e D um ponto sobre o arco AB que não contém C. Sejam I_A e I_B os incentros dos triângulos ADC e BDC, respectivamente. Prove que (I_AI_BC) é tangente a k se, e somente se,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC+CD}{BC+CD}$$

Problema 7 *(Irã/TST - 2017)* No triângulo ABC, P e Q são pontos do lado BC tais que $BP = CQ$ e P está entre B e Q. Sejam $\{A, E\} = AB \cap (APQ)$ e $\{A, F\} = AC \cap (APQ)$. Seja $T = EP \cap FQ$. Duas retas que passam pelo ponto médio de BC e são paralelas a AB e AC, interscetam EP e FQ em X e Y, respectivamente. Prove que (APQ) e (TXY) são tangentes entre si.

Problema 8 *(Sérvia/2016)* Seja O o circuncentro do $\triangle ABC$. A tangente t ao circuncírculo do $\triangle BOC$ encontra os lados AB e AC nos pontos $D \neq A$ e $\neq A$. O ponto A' é a reflexão do ponto A em relação a reta t. Prove que os circuncírculos dos triângulos $A'DE$ e ABC são tangentes entre si.

Problema 9 *(Irã/2004) e (Bósnia/TST - 2017)* O incírculo do triângulo ABC toca AB e AC nos pontos P e Q, respectivamente. A reta PQ encontra as retas BI e CI nos pontos K e L, respectivamente. Prove que (ILK) é tangente a ω_A se, e somente se, $AB + AC = 3BC$.

4.1 Exercícios sobre estrela da morte

Problema 10 Duas circunferências são tangentes internamente entre si no ponto A. Uma secante intersecta as circunferências nos pontos M, N, P e Q, nessa ordem. Prove que $\angle MAP = \angle NAQ$.

Problema 11 *(Romênia/TST - 2013)* As circunferências Γ e ω são tangentes internamente entre si no ponto P, com ω dentro de Γ. Uma corda AB de Γ é tangente a ω no ponto C. A reta PC encontra novamente Γ no ponto Q. As cordas QR e QS de Γ são tangentes a ω. Sejam I, X e Y os incentros dos triângulos APB, ARB e ASB, respectivamente. Prove que $\angle PXI + \angle PYI = 90°$.

Problema 12 *(Cone Sul/Lista - 2014)* Seja k o círculo inscrito de um triângulo não isósceles $\triangle ABC$ e seja I o centro de k. O círculo k toca os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ nos pontos P, Q e R, respectivamente. A reta $\overline{QR}$ encontra $\overline{BC}$ no ponto M. Considere um círculo k' que contém os pontos B e C e seja N a interseção de k e k'. O circuncírculo do triângulo MNP intersecta a reta $\overline{AP}$ no ponto L, diferente de P. Prove que os pontos I, L e M são colineares.