XXI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Águas de São Pedro, Brasil, 13–19 de Junho de 2010

Quarta-feira, 16 de Junho de 2010

Problema 1. Pedro tem que escolher duas frações irredutíveis, cada uma com numerador e denominador positivos, tais que:

- A soma das duas frações seja igual a 2.
- A soma dos numeradores das duas frações seja igual a 1000.

De quantas maneiras Pedro pode fazer isso?

Problema 2. Marcam-se em uma reta 44 pontos, numerados $1, 2, 3, \ldots, 44$ da esquerda para a direita. Vários grilos saltam na reta. Cada grilo parte do ponto 1, salta por pontos marcados e termina no ponto 44. Além disso, cada grilo sempre salta de um ponto marcado a outro marcado com um número maior.

Quando todos os grilos terminaram de saltar, notou-se que para cada par i, j, com $1 \leq i < j \leq 44$, há um grilo que saltou diretamente do ponto i para o ponto j, sem pousar em nenhum dos pontos entre eles.

Determine a menor quantidade de grilos para que isso seja possível.

Problema 3. *Recortar* um polígono convexo de n lados significa escolher um par de lados consecutivos AB, BC do polígono e substitui-los por três segmentos AM, MN e NC, sendo M o ponto médio de AB e N o ponto médio de BC. Em outras palavras, corta-se o triângulo MBN e obtém-se um polígono convexo de $n+1$ lados.

Seja $\mathcal{P}_6$ um hexágono regular de área 1. Recorta-se $\mathcal{P}_6$ e obtém-se o polígono $\mathcal{P}_7$. Então recorta-se $\mathcal{P}_7$, de uma das sete maneiras possíveis, e obtém-se o polígono $\mathcal{P}_8$, e assim sucessivamente. Prove que, independentemente de como sejam feitos os recortes, a área de $\mathcal{P}_n$ é sempre maior do que $2/3$.

Idioma: Português *Duração: 4 h*
Cada problema vale 10 pontos

XXI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Águas de São Pedro, Brasil, 13–19 de Junho de 2010

Quinta-feira, 17 de Junho de 2010

Problema 4. Pablo e Sílvia jogam em um tabuleiro 2010×2010. Primeiro Pablo escreve um número inteiro em cada casa. Feito isso, Sílvia repete tantas vezes quanto quiser a seguinte operação: escolher três casas que formem um L, como na figura, e somar 1 a cada número dessas três casas. Sílvia ganha se fizer com que todos os números do tabuleiro sejam múltiplos de 10.

Demonstre que Sílvia sempre pode escolher uma sequência de operações com as quais ela ganha o jogo.

Problema 5. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. Sejam ω_a, ω_b e ω_c os circuncírculos dos triângulos EAF, DBF e DCE, respectivamente. As retas DE e DF cortam ω_a em $E_a \neq E$ e $F_a \neq F$, respectivamente. Seja r_A a reta E_aF_a. Defina r_B e r_C de modo análogo. Prove que as retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo cujos vértices pertencem aos lados do triângulo ABC.

Problema 6. Determine se existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros não negativos que satisfaz as seguintes condições:

(i) Todos os números inteiros não negativos aparecem na sequência uma única vez;

(ii) A sequência

$$b_n = a_n + n, \quad n \geq 0,$$

é formada por todos os números primos, cada um aparecendo uma única vez.

Idioma: Português — *Duração: 4 h*
Cada problema vale 10 pontos