

III OLIMPÍADA MATEMÁTICA DO CONE SUL
Chile 1992

PROBLEMA 1

Encontre um número inteiro positivo n de maneira tal que se na sua representação decimal lhe é colocado um 2 à esquerda e um 1 à direita, o número resultante seja igual a $33n$.

PROBLEMA 2

Seja P um ponto fora da circunferência C . Encontrar dois pontos Q e R na circunferência tais que P, Q, R estejam em linha reta e Q seja o ponto médio do segmento PR . (Discutir o número de soluções).

PROBLEMA 3

Define-se o conjunto de 100 números $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/100$
Eliminam-se dois elementos quaisquer a e b deste conjunto e se inclui, no conjunto, o número $a + b + ab$ ficando assim um conjunto com um elemento a menos. Depois de 99 destas operações, fica só um número. Que valores pode ter esse número?

PROBLEMA 4

Prove que não existem números inteiros positivos x, y, z que satisfaçam

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

PROBLEMA 5

Num triângulo ABC , seja E o pé da altura desde A sobre BC .
Demonstrar que $AE = (b.c)/(2r)$
onde r é o raio da circunferência circunscrita, $b = AC$ e $c = AB$.

PROBLEMA 6

Temos um tabuleiro de $m \times n$ casas. Atribui-se inicialmente um número inteiro não negativo a cada uma das casas. No tabuleiro é permitido efetuar a seguinte operação: em qualquer par de casas com um lado em comum podem-se modificar os dois números somando-lhes um mesmo número inteiro (que pode ser negativo), sempre que ambos resultados sejam não negativos.

Que condições devem ser satisfeitas inicialmente na atribuição dos números, para deixar, mediante aplicações reiteradas da operação, zero em todas as casas?