

IV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Brasil 1993

PROBLEMA 1

Estando algumas pilhas de discos numa mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um dos seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais.

Inicialmente há sobre a mesa só uma pilha e esta tem 1000 discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente 3 discos.

PROBLEMA 2

Sejam três pontos A , B e C pertencentes a uma circunferência de centro O tais que $\angle AOB < \angle BOC$. Seja D o ponto médio do arco AC que contém a B . Seja K o pé da perpendicular a BC por D .

Prove que $AB + BK = KC$.

PROBLEMA 3

Determine o número de elementos que pode ter um conjunto B contido em $\{1, 2, \dots, n\}$ com a seguinte propriedade:

Para quaisquer a e b elementos de B , com a diferente de b , $(a - b)$ não divide $(a + b)$.

PROBLEMA 4

Num tabuleiro de xadrez (8×8) estão escritos ordenadamente os números de 1 a 64; na primeira fileira, de esquerda a direita estão os números de 1 a 8, na segunda fileira, de esquerda a direita são colocados de 9 a 16, etc. São colocados sinais $+$ ou $-$ a cada número de maneira que em cada fileira há 4 sinais $+$ e 4 sinais $-$, e o mesmo ocorre em cada coluna. Somam-se os 64 números obtidos.

Encontre todos os possíveis resultados de esta soma.

PROBLEMA 5

Prove que existe uma sucessão a_1, \dots, a_k, \dots , onde cada a_i é um dígito (ou seja a_i pertence a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) e $a_0 = 6$, tais que para cada inteiro positivo n o número $x_n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots + 10^{n-1}a_{n-1}$ verifica que $x_n^2 - x_n$ é divisível por 10^n .

PROBLEMA 6

Prove que dado um número inteiro positivo n , existe um inteiro positivo k_n com a seguinte propriedade: Dados k_n pontos quaisquer no espaço, 4 a 4 não coplanares, e associados números inteiros entre 1 e n a cada aresta que une 2 de destes pontos, há necessariamente um triângulo determinado por 3 deles cujas arestas têm associados o mesmo número.