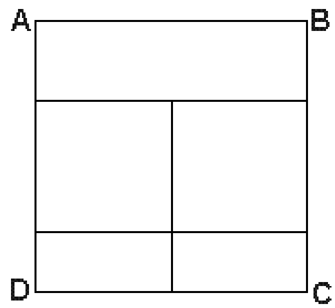
VII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Peru. 1996

Primeiro dia

PROBLEMA 1

Um quadrado *ABCD* é dividido em dois quadrados e três retângulos, como mostra a figura:



A área de cada um dos quadrados é a e a área de cada um dos dois retângulos menores é b. Se $a + b = 24$ e a raiz quadrada de a é um número natural, achar todos os valores possíveis da área do quadrado *ABCD*.

PROBLEMA 2

Considerar uma seqüência de números reais definida por:

$$a_{n+1} = a_n + 1/a_n \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demostrar que, qualquer que seja o número real positivo a_0, tem-se que a_{1996} é maior que 63.

PROBLEMA 3

Uma loja vende garrafas com as seguintes capacidades: 1 litro, 2 litros, ... 1996 litros. Os preços das garrafas satisfazem as duas condições a seguir:

1. Duas garrafas têm o mesmo preço se e somente se suas capacidades m, n ($m > n$) satisfazem $m - n = 1000$.
2. Cada garrafa de m litros de capacidade ($1 \leq m \leq 1000$) custa $1996 - m$ dólares.

Achar todos os pares de garrafas de m e n litros tais que:

a. $m + n = 1996$
b. *b*.o custo total do par seja o menor possível,
c. com o par se possa medir k litros, para todo k inteiro desde 1 até 1996.

NOTA: As operações permitidas para medir são:

i.Encher ou esvaziar qualquer das duas garrafas.
ii.Passar líquido de uma garrafa para a outra.

Ter-se-á conseguido medir k litros quando a quantidade de litros de uma garrafa mais a quantidade de litros da outra é igual a k.

VII Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Peru. 1996

Segundo dia

PROBLEMA 4
A seqüência 0, 1, 1, 1, ... , 1 contém 1996 números, sendo o primeiro zero e todos os demais um. Se escolhem dois ou mais números da seqüência (mas não todos) e se sustitui um deles pela média aritmética dos números escolhidos, obtendo-se assim uma nova seqüência de 1996 números.
Provar que, com a repetição desta operação, é possível obter uma seqüência na qual os 1996 números são iguais.

NOTA: Não é necessário escolher a mesma quantidade de números em cada operação.

PROBLEMA 5
Se pretende cobrir totalmente un quadrado de lado k (k inteiro e maior que um) com os seguintes retângulos: 1 retângulo de 1×1, 2 retângulos de 2×1, 4 retângulos de 3×1, ... , 2^n retângulos de $(n+1) \times 1$, de tal maneira que os retângulos não se superponham nem excedam os límites do quadrado.
Achar todos os valores de k para os quais isto é possível e, para cada valor de k encontrado, desenhar uma solução.

PROBLEMA 6
Achar todos os números inteiros $n \geq 3$ tais que exista um conjunto S_n formado por n pontos do plano que satisfaçam as duas condições seguintes:

1.Três pontos quaisquer não são colineares.
2.Nenhum ponto se encontra no interior do círculo cujo diâmetro tem por extremos dois pontos quaisquer de S_n.

NOTA: Os pontos da circunferência não são considerados interiores ao círculo.