

9ª. OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Primeiro dia.

Tempo: 4 horas 30 min.

PROBLEMA 1

São dados 98 cartões. Em cada um deles está escrito um dos números $1, 2, 3, \dots, 98$ (não existem números repetidos). Pode-se ordenar os 98 cartões de tal modo que ao considerar dois cartões consecutivos a diferença entre o número maior e o número menor escritos neles seja sempre maior que 48. Indicar como e de quantas formas é possível efetuar a ordenação.

PROBLEMA 2

Sejam H o ortocentro (interseção das alturas) do triângulo acutângulo ABC e M o ponto médio do lado BC . Seja X o ponto em que a reta HM intersecta o arco BC (que não contém A) da circunferência circunscrita a ABC . Seja Y o ponto de interseção da reta BH com a circunferência, distinto de B . Demonstre que $XY = BC$.

PROBLEMA 3

Prove que, pelo menos para 30% dos naturais n entre 1 e 1.000.000, o primeiro dígito de 2^n é 1.

Segundo dia.

Tempo: 4 horas 30 minutos.

PROBLEMA 4

Determine todas as funções f tais que

$$f(x^2) - f(y^2) + 2x + 1 = f(x + y) \cdot f(x - y)$$

quaisquer que sejam os números reais x, y .

PROBLEMA 5

Em *Terra Brasilis* existem n casas onde vivem n duendes, cada um em uma casa. Existem estradas de mão única de tal modo que:

- cada estrada liga duas casas;
- em cada casa começa exatamente uma estrada;
- em cada casa termina exatamente uma estrada.

Todos os dias, a partir do dia 1, cada duende sai da casa onde está e chega à casa vizinha. Uma lenda de *Terra Brasilis* diz que, quando todos os duendes regressarem à posição original, o mundo acabará.

- Demonstre que o mundo acabará.
- Se $n = 98$, demonstre que é possível que os duendes construam e orientem as estradas de modo que o mundo não se acabe antes de 300.000 anos.

PROBLEMA 6

O Prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:

- (i) cada linha passe exatamente por três paradas;
- (ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;
- (iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

Determine o número de paradas de ônibus da cidade.