OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – NÍVEL II – SEMANA OLÍMPICA
Salvador, 19 a 26 de janeiro de 2001

DESIGUALDADES

Onofre Campos
onofrecampos@bol.com.br

Vamos estudar algumas desigualdades clássicas, como as desigualdades entre as médias aritmética e geométrica, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, dentre outras. Para isso, precisamos estar familiarizados com algumas propriedades básicas que dizem respeito às desigualdades entre números reais. Dentre estas propriedades, é fundamental que entendamos as seguintes:

Proposição 1 Se x é um número real então $x^2 \geq 0$, com igualdade ocorrendo quando $x = 0$. De um modo geral, se $x_1, x_2, ..., x_n$ são números reais então $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq 0$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Proposição 2 Considere a função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Definindo $\Delta = b^2 - 4ac$, então $f(x) \geq 0$, para todo real x se, e somente se, $\Delta \leq 0$. Se $\Delta = 0$, então existe um **único** real λ tal que $f(\lambda) = 0$.

Destas proposições, decorrem outras desigualdades, bastante comuns, como veremos.

Problema 1 Sejam a, b e c números reais. Mostre que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a = b = c$.

Solução:

Usando que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, a desigualdade dada reduz-se a

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Ora, esta última desigualdade é sempre verdadeira e a igualdade ocorre se, e somente se, $a - b = b - c = c - a = 0$, ou seja, quando $a = b = c$, como queríamos mostrar.

Uma observação importante que devemos fazer é que escrevendo $(a - b)^2 \geq 0$, segue-se que $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, ou ainda, $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ (*), com igualdade quando $a = b$. Este é um resultado bastante simples e que será generalizado mais adiante.

Se a e b forem positivos, podemos ainda escrever $a = \sqrt{x}$, para algum real x e $b = \sqrt{y}$, para algum real y. De (*), segue-se que para quaisquer $x, y > 0$,

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = y$.

Problema 2 Sejam a, b e c reais positivos. Mostre que $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Solução:

Basta observar que $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ e $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. Multiplicando estas três desigualdades chegamos à desigualdade desejada.

Problema 3 (*Olimpíada Nórdica*) Determine todos os x, y, z reais maiores que 1 tais que

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}=2(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2})$$

Solução:

Escrevemos

$$x+\frac{3}{x-1}=(x-1)+(1+\frac{3}{x-1})=\underbrace{(x-1)+\frac{x+2}{x-1}\geq 2\sqrt{(x-1).\frac{x+2}{x-1}}}_{(*)}=2\sqrt{x+2}$$

ou, de modo simplificado,

$$x+\frac{3}{x-1}\geq 2\sqrt{x+2} \quad (1).$$

Analogamente, descobrimos que

$$y+\frac{3}{y-1}\geq 2\sqrt{y+2} \quad (2)$$

e que

$$z+\frac{3}{z-1}\geq 2\sqrt{z+2}\ . \quad (3)$$

Finalmente, somando estas três últimas desigualdades obtemos

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}\geq 2(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}) \quad (**).$$

Como a igualdade ocorre em (**), deve ocorrer também em (1), (2) e (3). Para que a igualdade ocorra em (1), por exemplo, deve ocorrer também em (*), o que nos dá $x-1=\frac{x+2}{x-1}$ $\therefore x^2 - 3x + 1 = 0$. Como $x > 1$, devemos ter $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Analogamente, devemos ter $y=z=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

A Desigualdade entre as médias Aritmética e Geométrica

Definição 1 Sejam a_1, a_2, ..., a_n números reais positivos. Define-se a Média Aritmética (MA) e a Média Geométrica (MG) de a_1, a_2,..., a_n da seguinte forma:

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{e} \quad MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\ .$$

Teorema 1 Se a_1, a_2,..., a_n são reais positivos, $n \geq 2$, então $MA \geq MG$, ou seja,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\ ,$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Em outras palavras, a Média Aritmética de n números reais positivos é maior que ou igual a Média Geométrica, com igualdade somente quando todos os números forem iguais.

Demonstração:

Faremos uma demonstração por indução sobre n, da seguinte maneira: se o teorema for válido para quaisquer n reais positivos, mostraremos que é válido também para quaisquer $2n$ reais positivos. Depois mostraremos que se é válido para quaisquer n reais positivos então é válido também para quaisquer $n - 1$ reais positivos. Dessa forma, percorreremos todos os números naturais e a indução ficará completa.

Para $n = 2$, o teorema nos dá $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, com igualdade se, e só se, $a_1 = a_2$. Isso já foi provado.

Agora, suponha que o teorema seja válido para quaisquer n números reais positivos (Hipótese de Indução). Vamos mostrar que para quaisquer $2n$ reais positivos o teorema continua válido. De fato, considere os reais positivos a_1, a_2,..., a_n, a_{n+1},..., a_{2n}. Temos

$$\frac{(a_1 + \ldots + a_n) + (a_{n+1} + \ldots + a_{2n})}{2n} = \frac{\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) + \left(\frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}\right)}{2} \geq \frac{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}}$$, como queríamos mostrar.

Agora mostraremos que se o teorema é válido para um dado natural n então é válido também para $n - 1$.

Considere os $n - 1$ reais positivos a_1, a_2,..., a_{n-1} e defina $a_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$. Dessa forma temos

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}\ .$$

Como o teorema vale para quaisquer n reais positivos (Hipótese de Indução), então

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\ .$$

Simplificando, obtemos $a_n \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$. Logo, pela definição de a_n, segue-se que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}\ ,$$

e o teorema é válido também para $n - 1$.

Falta apenas mostrar que a igualdade ocorre, em ambos os casos, somente quando todos os números forem iguais. Isso será deixado como exercício.

Problema 4 Se a, b e c são reais positivos tais que $a + b + c = 1$, mostre que

$$P = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Solução:

Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade, obtemos

$$P = 1 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{1}{abc}\ .$$

Usando que $MA \geq MG$, temos:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\ .$$

Fazendo $\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = q$, segue que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3q$. Da mesma forma,

$$\frac{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b^2 c^2}} = q^2,$$

e usando que $\frac{1}{abc} = q^3$, em (*) ficamos com

$$P \geq 1 + 3q + 3q^2 + q^3 = (1 + q)^3.$$

Finalmente, usando que $a + b + c = 1$, segue que

$$\frac{1}{3} = \frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{q} \therefore q \geq 3\ .$$

Logo, em (**), concluímos que $P \geq (1 + 3)^3 = 64$, como queríamos mostrar.

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Teorema 2 Sejam $a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n$ reais dados (não necessariamente positivos), não todos nulos ($n > 1$). Então

$$|a_1b_1 + ... + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2}$$

Além disso, teremos a igualdade se, e somente se, os a_i e os b_i forem proporcionais, i.e., se, e somente se, existir um real positivo λ tal que $b_i = \lambda.a_i$, para todo i.

Demosntração:

Considere a seguinte função do segundo grau

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2,$$

que podemos escrever como

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Observe que $f(x) \geq 0$ para todo real x, visto que f se escreve como a soma de quadrados, de modo que $\Delta \leq 0$, isto é,

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \leq 0.$$

Cancelando o fator 4 e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, chegamos na desigualdade de Cauchy:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)}.$$

Examinemos agora a igualdade. Se houver igualdade, quer dizer, se for $\Delta = 0$, então o trinômio tem uma raiz real λ:

$$(a_1\lambda - b_1)^2 + (a_2\lambda - b_2)^2 + ... + (a_n\lambda - b_n)^2 = 0$$

Dessa forma todos os parênteses devem ser nulos, i.e., $b_i = \lambda.a_i$, para todo i. Então, a igualdade deve ocorrer quando os a_i forem diretamente proporcionais aos b_i. É evidente que se eles forem proporcionais a igualdade ocorre.

Corolário 1 Dados n reais positivos $a_1, a_2,..., a_n$, temos $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} \geq \left(\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2$, com igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração:

Faça $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$ na desigualdade de Cauchy-Schwarz. A igualdade ocorre se, e somente se, $a_j = \lambda$, para $j = 1, 2..., n$.

Problemas Propostos

1. Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo. Mostre que a função

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2).x + c^2$$

é positiva, para todo real x.

2. (Olimpíada do Cone Sul – 1994) Seja p um real positivo dado. Achar o mínimo valor de $x^3 + y^3$ sabendo que x e y são números reais positivos tais que $xy.(x + y) = p$.

3. Se a e b são reais positivos tais que $a + b = 1$, prove que $ab^2 \le \frac{4}{27}$ e determine quando ocorre a igualdade.

4. Mostre que se a, $b > 0$ e $a + b = 1$, então

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}.$$

5. (Seleção para a Cone Sul – 1998) Sejam x, y reais positivos satisfazendo $x^2 + xy + y^2 > 3$. Prove que pelo menos um dos números $x^2 + xy$ e $y^2 + xy$ é maior que 2.

6. Mostre que se a, b e c são reais positivos então

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

7. Se a, b, c, d e e são números reais tais que $a + b + c + d + e = 8$ e $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$, determine o máximo valor de e.

8. (Olimpíada Rioplatense – 98) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c = 1$. Mostre que

$$\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5}+\frac{b^7+c^7}{b^5+c^5}+\frac{c^7+a^7}{c^5+a^5} \ge \frac{1}{3}.$$

9. Seja P um ponto no interior de um triângulo e sejam h_a, h_b e h_c as distâncias de P aos lados a, b e c, respectivamente. Mostre que o valor mínimo de $\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}$ ocorre quando P é o incentro do triângulo ABC.

10. (Torneio das Cidades – 94) Prove que para quaisquer reais positivos a_1, a_2,..., a_n vale a desigualdade

$$\left(1+\frac{a_1{}^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2{}^2}{a_3}\right)...\left(1+\frac{a_n{}^2}{a_1}\right) \ge (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n).$$