OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – NÍVEL III – SEMANA OLÍMPICA
Salvador, 19 a 26 de janeiro de 2001

FUNÇÕES CONTÍNUAS

Onofre Campos
onofrecampos@bol.com.br

1. INTRODUÇÃO

Vamos estudar aqui uma nova classe de funções: a das *funções contínuas*. Estas funções são muito comuns e as estudamos freqüentemente, embora quase sempre não nos damos conta de que estamos lidando com elas. Assim, por exemplo, as funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas, que já se tornaram bastante familiares para nós, são contínuas. O que faremos aqui é estudar de maneira geral e rápida as características de uma função contínua e algumas de suas principais propriedades.

Antes de tudo precisamos entender alguns conceitos fundamentais.

Definição 1 Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ uma seqüência de números reais. Dizemos que a seqüência (a_n) *converge* para um número real L se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$,

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Neste caso a seqüência (a_n) é dita *convergente* e escrevemos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ para denotar que a seqüência a_n converge para L. Caso a seqüência não seja convergente ela é dita *divergente.*

Exemplo 1 A seqüência (a_n) dada por $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ converge para 0. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que, para todo $n > n_0$, $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Basta tomar $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Neste caso, podemos dizer que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. FUNÇÕES CONTÍNUAS

Definição 2 Dados uma função $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in X$, dizemos que *f é contínua no ponto a* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

Se a função for contínua em todos os pontos do domínio X, dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.

Proposição 1 Dados $X \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ e f , g: $X \to \mathbb{R}$ funções contínuas no ponto $a \in X$, então as funções $f + g$, $f.g$: $X \to \mathbb{R}$, assim como $\dfrac{f}{g}$ caso $g(a) \neq 0$, são contínuas.

Proposição 2 Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, $g: Y \to R$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a função composta $g \circ f$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua no ponto a. Em outras palavras, a composta de duas funções contínuas é contínua.

Definição 3 Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que um número a é *ponto de acumulação de* X se existir uma seqüência (x_n) em X que converge para a.

Proposição 3 Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ e f: $X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação de X, as seguintes afirmações são equivalentes:

i) f é contínua em a;
ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
iii) Para toda seqüência (x_n) em X com $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ vale $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = f(a)$.

Demonstração:

(ii $\Rightarrow$ i) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. O mesmo vale se $|x - a| < \delta$, porque se $|x - a| = 0$, $x = a$ e $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Então, f é contínua em a.

(i $\Rightarrow$ iii) Seja (x_n) uma seqüência em X com $x_n \to a$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, seja δ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Para esse δ, existe um natural n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta$ $\therefore |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, e assim, $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = f(a)$.

(iii $\Rightarrow$ ii) Suponha que não valha (ii). Então, existe $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ tal que para todo $\delta > 0$, $0 < |x - a| < \delta$ e $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, considerando $\delta = 1/n$, existe $x \in X$, que chamaremos de x_n, tal que $|x_n - a| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, mas não vale $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = f(a)$, o que contradiz (iii). Logo, devemos ter $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, o que completa a demonstração.

Problema 1

Ache todas as funções contínuas f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) + f(x^2) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(Olimpíada Sueca – 1989)

Solução:

Inicialmente, notemos que a função é par, visto que $f(-x) = -f((-x)^2) = -f(x^2) = f(x)$. Vamos considerar $x \geq 0$. Para $x = 0$, obtemos $2.f(0) = 0$, tal que $f(0) = 0$. Também, para $x = 1$, obtemos $2.f(1) = 0$, tal que $f(1) = 0$. Seja $x > 0$. Vamos mostrar que $f(x) = 0$.

$$f(\sqrt{x}) = -f(x);$$
$$f(\sqrt[4]{x}) = -f(\sqrt{x}) = f(x);$$

e em geral,

$$f(\sqrt[2^{2n+1}]{x}) = -f(x) \text{ e } f(\sqrt[2^{2n}]{x}) = f(x).$$

Daí, definindo $x_n = \sqrt[2^{2n}]{x}$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x). \quad (1)$$

Por outro lado, usando que a função é contínua e que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(1) = 0. \quad (2)$$

De (1) e (2) segue-se que $f(x) = 0$, para todo $x \in$ R, que é a única função satisfazendo o enunciado.

Problema 2

Determine todas as funções contínuas f: R $\to$ R tais que

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para quaisquer x, y reais. (Equação de Cauchy)

Solução:

Para $x = 0$, obtemos $f(x) = f(x) + f(0)$, tal que $f(0) = 0$. Para $y = -x$, obtemos $f(0) = f(x) + f(-x)$, de modo que $f(-x) = -f(x)$. Logo, a função é impar. Vamos considerar x, $y > 0$. Para $y = x$ obtemos $f(2x) = 2.f(x)$, e por indução, $f(n.x) = n.f(x)$, para todo natural n. Agora, para $x = 1$, obtemos $f(n) = n.f(1)$, para todo natural n. Para $x = \frac{m}{n}$, obtemos

$$f(n.\frac{m}{n}) = n.f(\frac{m}{n}) = f(m) = m.f(1) \therefore f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}.f(1).$$

Dessa forma, mostramos que para todo racional x, $f(x) = x.f(1)$. Para x irracional, tomamos uma seqüência (x_n) de números racionais com $x_n \to x$. Pela continuidade da função, obtemos

$$f(x) = \lim_{x_n\to x} f(x_n) = \lim_{x_n\to x} x_n.f(1) = x.f(1).$$

Logo, $f(x) = x.f(1)$, para todo real x.

3. TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO (TVI)

Teorema 1 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < y < f(b)$ ou $f(b) < y < f(a)$ então existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Demonstração:

Suponhamos sem perda de generalidade que $f(a) < f(b)$. O caso $f(b) < f(a)$ é análogo. Seja $y \in [f(a), f(b)]$. Queremos encontrar $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$. Vamos utilizar o algoritmo da biseção sucessiva. Sejam $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Denote por x_1 o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$. Se $f(x_1) < y$, defina $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$, mas se $f(x_1) \geq y$, defina $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$. Em ambos os casos temos $f(a_1) \leq y \leq f(b_1)$ e o comprimento do intervalo $[a_1, b_1]$ é metade do intervalo $[a, b]$.

Agora, seja x_2 o ponto médio de $[a_1, b_1]$. Se $f(x_2) < y$, defina $a_2 = x_2$ e $b_2 = b_1$, mas se $f(x_2) \geq y$ defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_2$. Novamente, em ambos os casos, teremos $f(a_2) \leq y \leq f(b_2)$ e o comprimento do intervalo $[a_2, b_2]$ será um quarto do intervalo $[a, b]$.

Continuamos bisectando cada intervalo, obtendo uma cadeia de intervalos encaixados

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

cujo comprimento converge para zero, pois $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Isto implica que as seqüências (a_n) e (b_n) convergem para o mesmo número real, digamos x.

Pela continuidade de f, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x)$ e $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x)$. Além disso, para cada n, $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$, e pelo *teorema do sanduíche*, obtemos

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq y \leq \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x),$$

de onde concluímos que $f(x) = y$, e o teorema está provado.

Corolário 1 Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a).f(b) < 0$. Então existe um número real $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Problema 3

Seja $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$. Prove o mesmo resultado para 1/3 em vez de 1/2.

Solução:

Definimos $g: [0,1/2] \to \mathbb{R}$ pondo $g(x) = f(x) - f(x + 1/2)$. Então, g é contínua e $g(0) + g(1/2) = 0$. Isto significa que $g(0)$ e $g(1/2)$ possuem sinais opostos, ou seja, $g(0).g(1/2) < 0$. Pelo TVI existe um número real $c \in [0, 1/2]$ tal que $g(c) = 0$. Logo, $f(c) = f(c + 1/2)$. Considerando 1/3 em vez de 1/2, definimos $h: [0, 2/3] \to \mathbb{R}$ pondo $h(x) = f(x) - f(x + 1/3)$. Neste caso, teremos $h(0) + h(1/3) + h(2/3) = 0$. Logo, h muda de sinal em[0, 1/3] ou em [1/3, 2/3]. Dessa forma, deve existir $d \in [0, 2/3]$ tal que $h(d) = 0$ ou $f(d) = f(d + 1/3)$.

Problema 4

Seja p um polinômio de coeficientes reais e grau ímpar. Mostre que p possui pelo menos uma raiz real.

Solução:

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, com $a_n > 0$. Então, para $x \neq 0$,

$$p(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Daí, como n é ímpar, é imediato que $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$,de modo que existem a e b reais, com $a < 0 < b$, tais que $p(a) < 0 < p(b)$. Pelo TVI, p tem ao menos uma raiz real.

4. Problemas Propostos

1. Determine todas as funções contínuas f: R → R tais que

$$f(x + y) = f(x).f(y)$$

para quaisquer x, y reais.

2. (Equação funcional de Jensen) Determine todas as funções contínuas f: R → R tais que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

para quaisquer x, y reais.

3. Ache todas as funções contínuas f definidas no conjunto dos números reais e tais que

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right),$$

para todo real x. (Bulgaria – 1997)

4. Seja f: $[a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Prove que f possui um ponto fixo.

5. Seja f: R → R contínua e tal que $f(x).f(f(x)) = 1$, para todo x. Se $f(1000) = 999$, calcule $f(500)$.

(Leningrado)

6. Uma função f definida mo intervalo $[0, 1]$ satisfaz $f(0) = f(1)$ e se $x_1, x_2 \in [0, 1]$ então $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$. Mostre que $|f(x_1) - f(x_2)| < 1/2$, para quaisquer $x_1, x_2 \in [0, 1]$.
(Olimpíada Chinesa –1983)

7. Determine todos os reais a tais que, para toda função contínua f, definida em $[0, 1]$ e tal que $f(0) = f(1)$, exista $x_0 \in [0, 1 - a]$ satisfazendo $f(x_0) = f(x_0 + a)$. (Austrália – 1982)

8. Sejam $f, g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ funções contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

9. Prove que a única função contínua $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ que satisfaz

$$f(f(f(x))) = x$$

é a função identidade $f(x) \equiv x$. (Sugestão: Prove que se uma função é injetiva e contínua então ela é monótona).

10. Seja $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ uma função contínua tal que, para todo real x, tenhamos $f(f(f(x))) = x^2 + 1$. Prove que f é par.

11. Seja $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ uma função contínua que assume valores positivos e negativos. Dado $k > 2$ natural, prove que existem reais $a_1, a_2, ..., a_k$ em progressão aritmética tais que

$$f(a_1) + f(a_2) +...+ f(a_k) = 0.$$

12. Seja $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ uma função contínua que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $f(n) = 0$, para todo inteiro n;
ii) se $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$ então $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$.

Mostre que $f(x) = 0$, para todo real x.

13. (Teorema do Valor Extremo) Se $f :[a, b] \to \mathrm{R}$ é uma função contínua, então existem c e d no intervalo $[a, b]$ tais que $f(c) \le f(x) \le f(d)$, para todo x em $[a, b]$ (ou seja, $f(c)$ é o mínimo valor de f sobre $[a, b]$ e $f(d)$ é o máximo valor de f sobre $[a, b]$). (Sugestão: Utilize o método da biseção sucessiva que usamos para mostrar o TVI).

14. Sejam $c > 0$ uma constante real e f uma função definida nos reais e tomando valores reais que satisfaz $|f(x) - f(y)| \le c.|x - y|$, para quaisquer x, y reais. Mostre que f é contínua.

15. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função tal que $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$, para quaisquer $x, y \in [0, 1]$. Mostre que f ou $f \circ f$ possui um ponto fixo. (Sugestão: Considere a função $g(x) = |f(x) - x|$ e use o teorema do Valor Extremo).

5. Bibliografia

[1] Larson, Loren C., Problem-solving through problems (Problem books in mathematics)

[2] Engel, Arthur, Problem-Solving strategies (Problem books in mathematics)

[3] Lima, Elon Lages, Curso de análise, vol. I. Rio de Janeiro, 8ª ed.