INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PROJETIVA

Luciano G. M. Castro

♦ Nível Avançado

Artigo baseado em aula ministrada na III Semana Olímpica
Piracicaba - SP

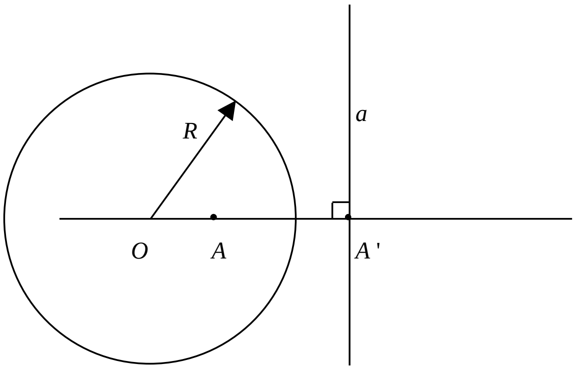
Começamos com um problema de Geometria Euclidiana:

Problema Inicial:

As tangentes a uma circunferência de centro *O*, traçadas por um ponto exterior *C*, tocam a circunferência nos pontos *A* e *B*. Seja *S* um ponto qualquer da circunferência. As retas $\overleftrightarrow{SA}, \overleftrightarrow{SB}$ e $\overleftrightarrow{SC}$ cortam o diâmetro perpendicular a $\overleftrightarrow{OS}$ nos pontos *A*', *B*' e *C* ', respectivamente.
Prove que *C'* é o ponto médio de *A*'*B*'.
Encorajamos o leitor a resolver este problema utilizando métodos da Geometria Euclidiana, antes de prosseguir.
Nossa principal meta é desenvolver ferramentas da Geometria Projetiva que nos permitam resolver este e outros problemas similares de forma direta e natural.

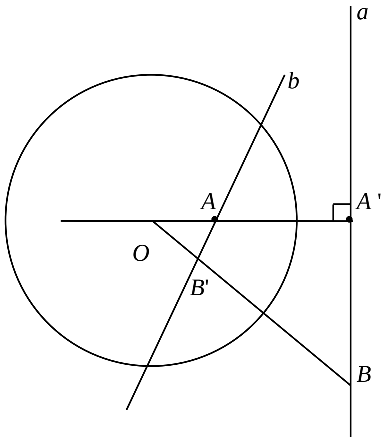
1. POLARIDADE

Dada uma circunferência γ, de centro *O* e raio *R*, vamos criar uma associação entre pontos e retas do plano, da seguinte maneira: Para cada ponto *A* distinto de *O*, seja *A*' o ponto da semi-reta $\overrightarrow{OA}$ tal que $OA \times OA' = R^2$. (*A*' é chamado inverso de *A* em relação a γ. A transformação $A \rightarrow A'$ é a inversão relativa a γ). Seja *a* a reta perpendicular a $\overrightarrow{OA}$ passando por *A*'. Dizemos que *a* é a reta polar de *A* em relação a γ, e que *A* é o pólo de *a* em relação a γ.



A transformação do plano que leva cada ponto em sua polar e cada reta em seu pólo é chamada de polaridade. Para simplificar a notação, usaremos a mesma letra para designar um ponto (maiúscula) e sua polar (minúscula).

Teorema 1: Sejam *A* e *B* dois pontos do plano, *a* e *b* suas respectivas polares. Se $B \in a$, então $A \in b$. Neste caso, dizemos que *A* e *B* são conjugados.



Considere um ponto $B \in a$.

Seja $B' \in \overrightarrow{OB}$ tal que $\overleftrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{OB}$. Os triângulos OAB' e OBA' são retângulos e têm um ângulo comum ($A\hat{O}B' \cong B\hat{O}A'$), logo são semelhantes. Assim,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \Leftrightarrow OB \times OB' = OA \times OA' = R^2.$$

Logo B' é o inverso de B, de onde $\overleftrightarrow{AB'} = b$ e $A \in b$.

Assim, se imaginarmos o ponto B variando ao longo da reta a, sua polar, b, variará ao longo do feixe de retas que passam pelo ponto A.

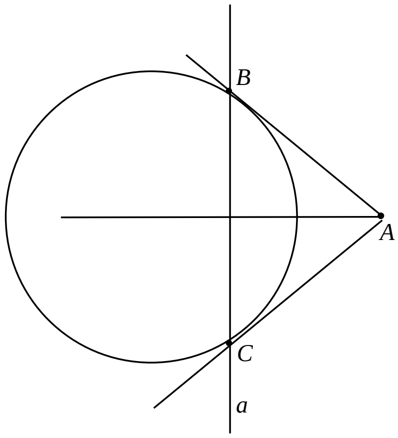
Diremos que um ponto e uma reta são incidentes quando o ponto pertence à reta, o que é o mesmo que dizer que a reta passa pelo ponto.

A polaridade, portanto, é uma transformação que preserva incidências.

Exercício 1: Se um ponto é conjugado a si mesmo, então ele pertence à circunferência e sua polar é a tangente à circunferência por ele.

Este resultado nos permite desenvolver a seguinte construção para a reta polar de um ponto A exterior à circunferência:

Exercício 2: Se A é exterior à circunferência, sejam B e C os pontos de contato das duas tangentes à circunferência traçadas por A. A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é a polar de A.



Solução:

Como A pertence às polares de B e C, então B e C pertencem à polar de A. Logo $a = \overleftrightarrow{BC}$

2. O PLANO PROJETIVO

A polaridade definida anteriormente sugere que pontos e retas têm comportamentos parecidos em relação à incidência. Há algumas falhas, porém. A transformação não está definida para o ponto O, centro da circunferência, nem tampouco para as retas que passam por O.

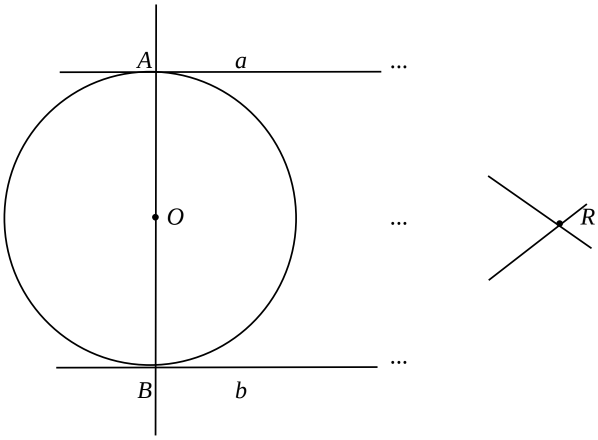
Podemos resolver este problema ampliando o plano euclidiano, acrescentando-lhe uma nova reta que chamaremos de "reta do infinito", que representaremos por *o*. Esta nova reta será a polar do ponto *O*.

Formalmente, os pontos da nova reta do infinito estão em correspondência biunívoca com os feixes de retas paralelas no plano euclidiano.

Vejamos como a polaridade nos leva naturalmente a esta definição para os pontos do infinito.

Por exemplo, vamos identificar o pólo de uma reta *r* que passa por *O*. Sejam *A* e *B* os pontos de contato de *r* com a circunferência. Como *A* e *B* estão sobre a reta *r*, suas retas polares *a* e *b* passam pelo pólo *R*. Logo *R* é o ponto de encontro das duas retas *a* e *b*, que no plano Euclidiano seriam paralelas. De fato, a reta polar de qualquer ponto de *r* será perpendicular a *r* no plano euclidiano. Estas retas passam a ser, no plano projetivo, um feixe de retas concorrentes (no ponto do infinito *R*).

Esta é a maneira de trabalhar com a reta do infinito: cada um de seus pontos corresponde a um único feixe de retas paralelas no plano euclidiano. E vice-versa: a cada feixe de retas paralelas no plano euclidiano corresponde um único ponto da reta do infinito.



3. O PRINCÍPIO DA DUALIDADE

Os pontos e retas do plano projetivo têm exatamente o mesmo comportamento em relação a incidência. Assim, qualquer propriedade envolvendo pontos, retas e incidência permenece válida ao trocarmos pontos por retas e retas por pontos. A nova propriedade assim obtida é denominada "dual" da primeira.

Em outras palavras, para todo teorema da Geometria Projetiva recebemos outro grátis, oferecido pelo Princípio da Dualidade. Basta trocar a palavra "ponto" pela palavra "reta" e vice versa.

Exemplos:

Propriedade	**Dual**
Dada uma reta, sempre existe um ponto não incidente a ela.	Dado um ponto, sempre existe uma reta não incidente a ele.
Cada reta é incidente a pelo menos três pontos distintos.	Cada ponto é incidente a pelo menos três retas distintas.
Dois pontos distintos determinam	Duas retas distintas determinam um único

uma única reta a eles incidente.	ponto a elas incidente.

Observação:
Apesar de termos definido o plano projetivo como uma extensão do plano euclidiano, isto não é necessário. O plano projetivo existe de forma independente, podendo ser caracterizado a partir de um conjunto de axiomas, entre os quais estão as propriedades duais citadas anteriormente.

4. QUÁDRUPLAS HARMÔNICAS

No plano euclidiano, se quatro pontos *A*, *B*, *C* e *D* de uma reta são tais que:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

dizemos que *C* e *D* "dividem harmonicamente" o segmento $\overline{AB}$.
Observe que, de acordo com a definição, isto também implica que *A* e *B* dividem harmonicamente o segmento $\overline{CD}$. Representaremos esta situação com o símbolo $\mathscr{H}(AB,CD)$. Também diremos que *A, B, C* e *D* , nesta ordem, formam uma "quádrupla harmônica".
Dados os pontos *A*, *B* e *C* sobre uma reta, o ponto *D* tal que $\mathscr{H}(AB;CD)$ é chamado "conjugado harmônico" de *C* em relação a $\overline{AB}$.
Surpreendentemente, apesar da definição utilizar a noção de distância (que não faz sentido no plano projetivo), o conceito de quádruplas harmônicas faz sentido no Plano Projetivo, por meio da seguinte construção para o conjugado harmônico:

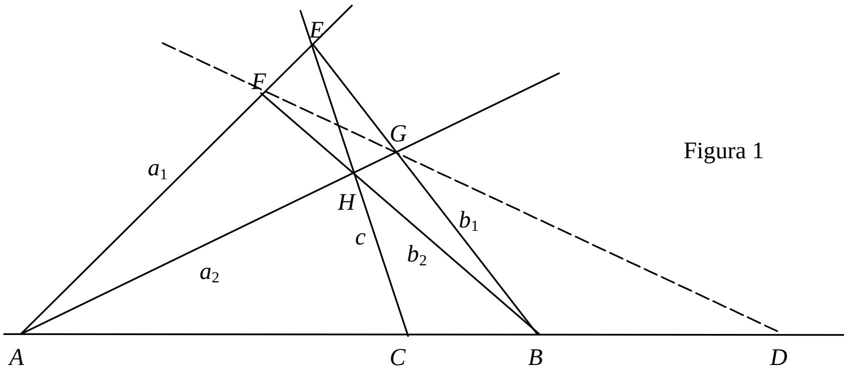


Figura 1

Dados os pontos *A*, *B* e *C* sobre uma reta *r*, traçamos duas retas quaisquer a_1 e a_2 passando por *A* e uma reta *c* passando por *C*. Unindo a *B* os pontos de incidência de *c* com a_1 e a_2 , respectivamente, obtemos as retas b_1 e b_2. Fica então formado um quadrilátero (*EFHG*, na figura) tal que os lados opostos concorrem em *A* e *B*, e tal que uma de suas diagonais passa por *C*. Seja *D* o ponto de encontro de *r* com a outra diagonal do quadrilátero. Então *D* é o conjugado harmônico de *C* em relação a $\overleftrightarrow{AB}$.

Esta construção é a definição de quádruplas harmônicas no plano projetivo. Vejamos que ela coincide, no plano Euclidiano, com a definição usual. Sejam os pontos *E*, *F*, *G* como na figura 1.
Aplicando o Teorema de Menelaus* no ΔABE , secante *DGF*, temos:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BG}{EG} \cdot \frac{EF}{AF} = 1. \qquad (1)$$

No ΔABE, aplicamos o Teorema de Ceva* para as cevianas concorrentes $\overline{EC}, \overline{BF}$ e $\overline{AG}$:

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BG}{EG} \cdot \frac{EF}{AF} = 1. \quad (2)$$

De (1) e (2) temos $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$.

*Ver apêndice.

5. PONTO MÉDIO E CONJUGAÇÃO HARMÔNICA

O principal indício de que quádruplas harmônicas são uma noção projetiva é o fato de, no plano euclidiano, o ponto médio de um segmento não possuir conjugado harmônico.

Porém, no plano projetivo, sejam *A* e *B* pontos sobre a reta *r* e *C* o ponto médio de $\overline{AB}$. Ao realizarmos a construção da figura 1, verificamos que $\overline{FC}$ é paralelo a *r*. No plano projetivo, o conjugado harmônico *D* é o ponto do infinito correspondente ao feixe de retas paralelas a *r*.

6. FEIXES HARMÔNICOS

Vamos agora dualizar a definição de quádrupla harmônica. Dadas 3 retas *a*, *b* e *c* concorrentes em um ponto *R*, podemos dualizar, passo a passo, a construção do conjugado harmônico:

Sobre a reta *a* tomamos dois pontos distintos A_1 e A_2 e sobre a reta *c* tomamos um ponto *C*. Sejam B_1 e B_2 os pontos de intersecção da reta *b* com as retas $\overleftrightarrow{CA_1}$ e $\overleftrightarrow{CA_2}$, respectivamente. Seja *d* a reta determinada pelos pontos *R* e $\overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_2B_1}$. Chamamos *d* de conjugado harmônico de *c* em relação a *a* e *b*. Dizemos que as quatro retas concorrentes *a*, *b*, *c*, e *d* formam um "feixe harmônico". Representamos esta situação com o símbolo $\mathcal{H}(ab, cd)$.

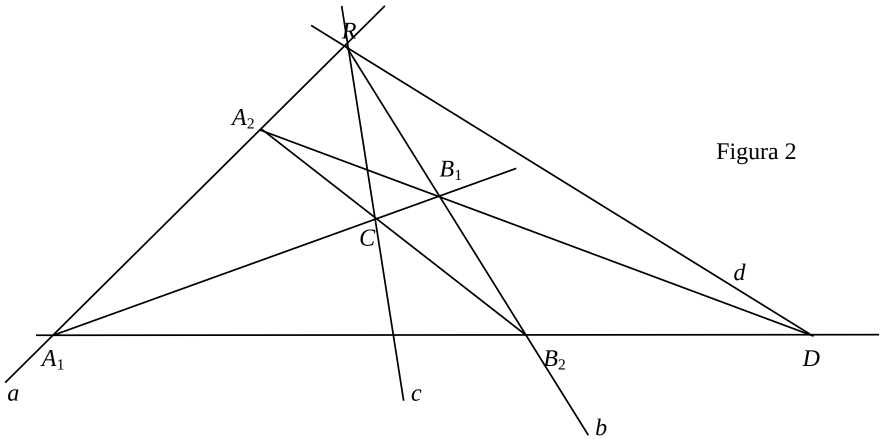


Figura 2

Teorema 2: Uma reta qualquer do plano corta um feixe harmônico em quatro pontos que formam uma quádrupla harmônica.

Se você percebeu a semelhança entre as figuras 1 e 2 deve ter desconfiado deste fato. A demonstração é imediata.

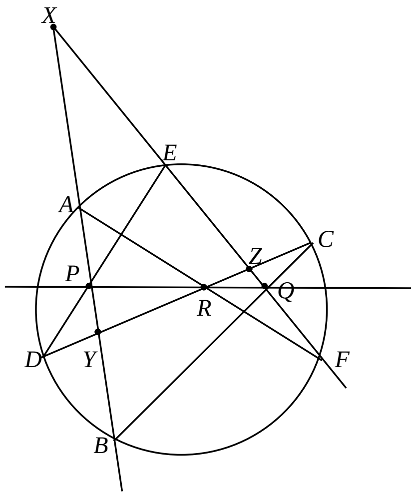
Na construção da figura 2, os pontos A_1 e B_2 podem ser escolhidos sobre uma reta *s* arbitrária (que não passe por *R*), e o ponto *C* fora de *s*. As retas $\overleftrightarrow{A_1C}$ e $\overleftrightarrow{B_2C}$ determinam os pontos B_1 e A_2. Sendo $c \cap s = C'$ e $d \cap s = D$, vemos que o quadrilátero RA_2CB_1 possui dois lados opostos concorrendo em A_1 e B_2, com suas diagonais passando por C' e D . Portanto $\mathscr{H}(A_1B_2;C'D)$, como queríamos demonstrar.

Exercício 3:
Escreva o dual doTeorema anterior.

7. O TEOREMA DE PASCAL

Sem dúvida, é um dos mais belos teoremas da Geometria Projetiva. É válido para qualquer cônica, apesar de que aqui só veremos a demonstração para a circunferência, no plano euclidiano. É importante mencionar, no entanto, que no Plano Projetivo não há qualquer diferença entre uma circunferência e qualquer outra cônica não-degenerada.

Teorema 3: Os pontos de encontro entre os 3 pares de lados opostos de um hexágono $ABCDEF$ (convexo ou não) inscrito em uma circunferência são colineares.



Consideremos o triângulo XYZ indicado na figura. Aplicamos o Teorema de Menelaus três vezes:

ΔXYZ , secante PDE:

$$\frac{PX}{PY}\cdot\frac{DY}{DZ}\cdot\frac{EZ}{EX}=1$$

ΔXYZ , secante QBC:

$$\frac{QZ}{QX}\cdot\frac{BX}{BY}\cdot\frac{CY}{CZ}=1$$

ΔXYZ , secante RAF:

$$\frac{RY}{RZ}\cdot\frac{AX}{AY}\cdot\frac{FZ}{FX}=1$$

Multiplicando essas três últimas equações e lembrando que
$XA \cdot XB = XE \cdot XF$,
$YA \cdot YB = YC \cdot YD$ e
$ZC \cdot ZD = ZE \cdot ZF$ (potência dos pontos x, y, z em relação à circunferência), obtemos
$\frac{PX}{PY}\cdot\frac{QZ}{QX}\cdot\frac{RY}{RZ}=1.$

Logo, pelo recíproco do Teorema de Menelaus no triângulo XYZ, secante PQR, temos que P, Q e R são colineares.

Fazendo coincidir certos pares de pontos no hexágono $ABCDEF$, podemos deduzir teoremas análogos ao de Pascal para pentágonos, quadriláteros e até triângulos inscritos na circunferência. Por exemplo, fazendo coincidir A com B e D com E, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ tornam-se tangentes à circunferência, e obtemos a seguinte configuração:

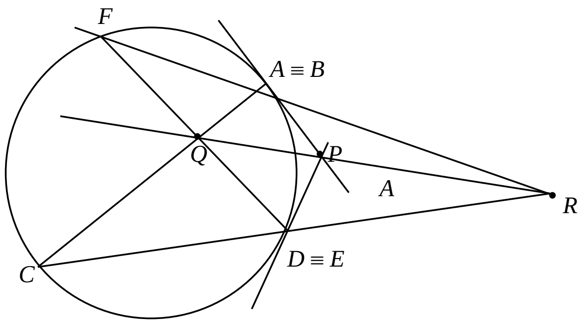


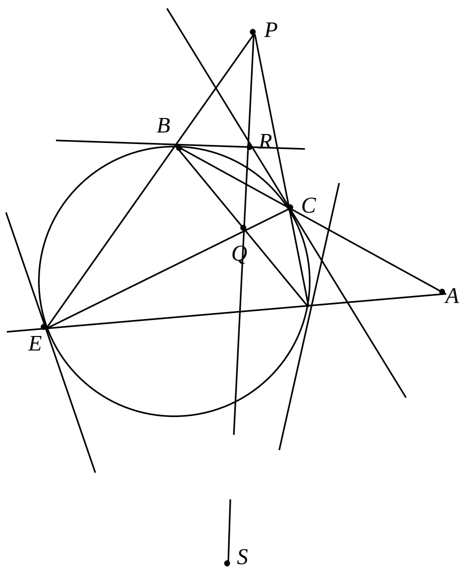
Figura 3

Exercício 4:
Na figura anterior, verifique que o ponto comum às tangentes em C e F também pertence à reta PQR.

8. MAIS POLARIDADES

Agora estamos prontos para retomar nosso estudo das polaridade. Aproveitando tudo o que vimos até aqui, vamos deduzir algumas propriedades mais avançadas.

Teorema 4: (Construção da reta polar usando apenas régua)
Seja γ uma circunferência e A um ponto exterior a ela.
Consideremos duas retas distintas passando por A e cortando γ nos pontos B, C, D e E (figura). Então a reta polar de A em relação a γ é a reta que une os pontos $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{BE} \cap \overleftrightarrow{CD}$.



Demonstração:

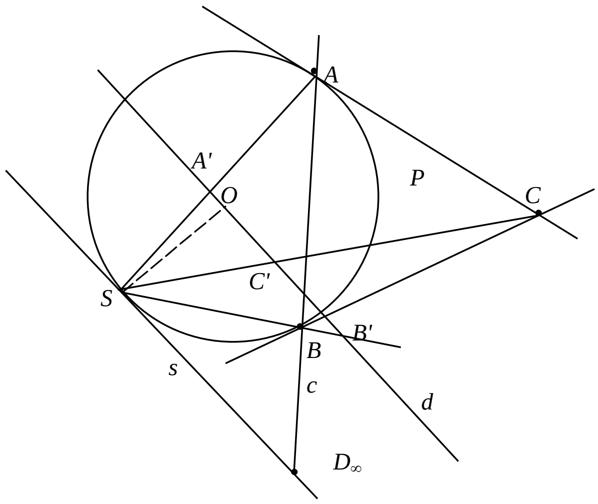
As polares de B, C, D e E são as retas b, c, d, e e tangentes a γ em seus respectivos pólos.
Sendo $R = b \cap c$ e $S = d \cap e$, temos que as polares de R e S são as retas $r = \overleftrightarrow{BC}$ e $s = \overleftrightarrow{DE}$.
Como $A = r \cap s$, sua polar é a reta $a = \overleftrightarrow{RS}$.
Sendo $P = \overleftrightarrow{BE} \cap \overleftrightarrow{CD}$ e $Q = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{EC}$, um dos corolários do Teorema de Pascal garante que P, Q, R e S são colineares, logo $a = \overleftrightarrow{PQ}$, como queríamos demonstrar.

Teorema 5: (Relação entre reta polar e quádruplas harmônicas)
Dados uma circunferência γ e um ponto exterior A, qualquer reta secante à circunferência passando por A corta a polar a no conjugado harmônico do ponto A em relação ao segmento com extremos nos dois pontos de corte da secante com a circunferência.

Demonstração: Exercício 5
(Dica: na figura anterior, use o quadrilátero *PBQC* para encontrar o conjugado harmônico de *A* em relação a $\overline{ED}$).

9. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL:

Podemos agora apresentar uma solução simples e elegante para o problema proposto no início deste artigo.

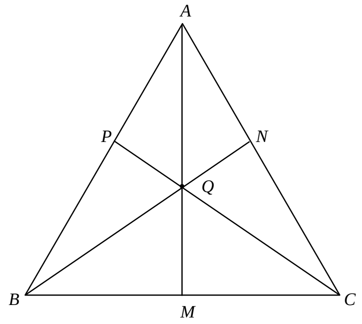


Seja *d* o diâmetro perpendicular a $\overline{OS}$.
Seja D_∞ o ponto do infinito correspondente ao feixe de retas paralelas a *d*. Queremos provar que $\mathcal{H}(A'B', C'D_\infty)$. Para isto, basta provar que as retas $\overleftrightarrow{SA}$, $\overleftrightarrow{SB}$, $\overleftrightarrow{SC}$ e $\overleftrightarrow{SD_\infty}$ formam um feixe harmônico. Parece natural tentar verificar que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ corta o feixe em uma quádrupla harmônica. Mas isso equivale a provar que $\overleftrightarrow{SC}$ é a reta polar do ponto $\overleftrightarrow{SD_\infty} \cap \overleftrightarrow{AB}$.
Isto é simples:

$\rightarrow$ *C* é a intersecção das polares de *A* e *B*, logo sua polar é $c = \overleftrightarrow{AB}$.
$\rightarrow$ $\overleftrightarrow{SD_\infty}$ é tangente à circunferência no ponto *S*, logo é a polar de *S* $(\overleftrightarrow{SD_\infty} = s)$.
Assim, $\overleftrightarrow{SD_\infty} \cap \overleftrightarrow{AB} = s \cap c$, e sua polar é, portanto, $\overleftrightarrow{SC}$, como queríamos demonstrar.

APÊNDICE:

TEOREMA DE CEVA:



Suponha que as cevianas AM, BN e CP de um triângulo ABC se encontrem em um ponto Q. Então

$$\frac{AN}{CN}\cdot\frac{CM}{BM}\cdot\frac{BP}{AP}=1.$$

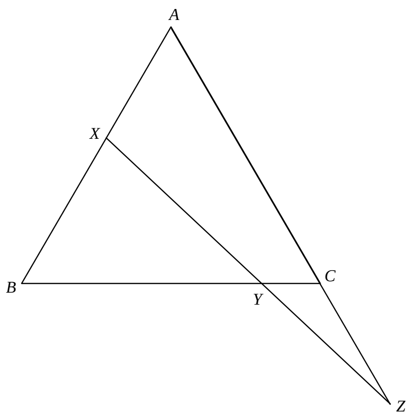
Prova:

Suponha que $Q=t_1A+t_2B+t_3C$ com $t_1+t_2+t_3=1$.

Então teremos $M=\dfrac{t_2B+t_3C}{t_2+t_3}$, $N=\dfrac{t_1A+t_3C}{t_1+t_3}$ e $P=\dfrac{t_1A+t_2B}{t_1+t_2}$.

Assim, $\dfrac{AN}{CN}\cdot\dfrac{CM}{BM}\cdot\dfrac{BP}{AP}\cdot\dfrac{t_3}{t_1}\cdot\dfrac{t_2}{t_3}\cdot\dfrac{t_1}{t_2}=1$ ∎

TEOREMA DE MENELAUS:



Suponha que $X\in\overleftrightarrow{AB}$, $Y\in\overleftrightarrow{BC}$ e $Z\in\overleftrightarrow{AC}$ sejam colineares. Então

$$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{BY}{CY}\cdot\frac{CZ}{AZ}=1.$$

Prova:

Suponha que $X=tA+(1-t)B$ e $Y=sB+(1-s)C$.

Então $Z=uX+(1-u)Y$, onde u é tal que $(1-t)u+s(1-u)=0$, ou seja,

$Z=\dfrac{st}{s+t-1}A-\dfrac{(1-s)(1-t)}{s+t-1}C$. Assim,

$\dfrac{AX}{BX}\cdot\dfrac{BY}{CY}\cdot\dfrac{CZ}{AZ}=\dfrac{1-t}{t}\cdot\dfrac{1-s}{s}\cdot\dfrac{st}{(1-s)(1-t)}=1$ ∎