14ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

12 a 19 de setembro, La Havana, Cuba 1999

Primeiro Dia

PROBLEMA 1:

Encontre todos os inteiros positivos que são menores que 1000 e cumprem a seguinte condição: o cubo da soma dos seus dígitos é igual ao quadrado do referido inteiro.

PROBLEMA 2:

Dadas duas circunferências M e N, dizemos que M bissecta N se a corda comum é um diâmetro de N.

Considere duas circunferências fixas C_1 e C_2 não-concêntricas.

a) Prove que existem infinitas circunferências B tais que B bissecta C_1 e B bissecta C_2.

b) Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências B.

PROBLEMA 3:

Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n pontos distintos sobre uma reta do plano ($n \geq 2$).

Consideram-se as circunferências de diâmetro $\overline{P_iP_j}$ ($1 \leq i < j \leq n$) e colorimos cada circunferência com uma cor escolhida entre k cores dadas.

Chamamos (n, k)-*nuvem* a esta configuração.

Para cada inteiro positivo k, determine todos os n para os quais se verifica que qualquer (n,k)-*nuvem* contém duas circunferências tangentes exteriormente da mesma cor.

Nota: Para evitar ambiguidades, os pontos que pertencem a mais de uma circunferência não são coloridos.

Segundo Dia

PROBLEMA 4:

Seja B um inteiro maior que 10 tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demonstre que B tem fator primo maior ou igual a 11.

PROBLEMA 5:

Um triângulo acutângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O. As alturas do triângulo são AD, BE, e CF. A reta EF intersecta a circunferência em P e Q.

a) Prove que OA é perpendicular a PQ.

b) Se M é o ponto médio de BC, prove que $\overline{AP}^2 = 2 . \overline{AD} . \overline{OM}$.

PROBLEMA 6:

Sejam A e B pontos do plano e C um ponto da mediatriz de AB.Constrói-se uma sucessão $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, da seguinte maneira:

$C_1 = C$ e, para $n \geq 1$, se C_n não pertence ao segmento AB, C_{n+1} é o circuncentro do triângulo ABC_n.

Determine todos os pontos C tais que a sucessão $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ está definida para todo n e é periódica a partir de um certo ponto.

Nota: Uma sucessão $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ é periódica a partir de um certo ponto se existem inteiros positivos k e p tais que $C_{n+p} = C_n$ para todo $n \geq k$.