Semana Olímpica – Inversão

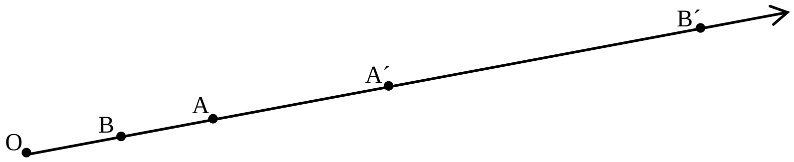
Salvador, 20 e 21/1/2001

Ralph Costa Teixeira – ralph@impa.br

I: Resumo da Teoria

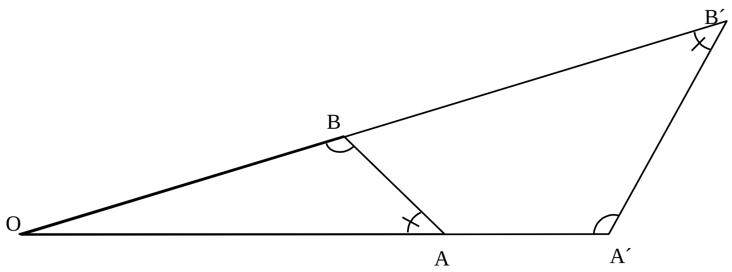
Definição. A inversão de centro (ou pólo) O e raio k leva um ponto A a um ponto A´ tal que

$$A' \in \overrightarrow{OA}$$
$$\overline{OA}.\overline{OA'} = k^2$$



Notação. Nesta parte I (Teoria), usaremos sempre O para o pólo da inversão, k para o seu raio e A´,B´,... para os transformados de A, B, ... Note que (A´)´≡A.

Propriedade 1. (Transporte de ângulos) Os triângulos OAB e OB´A´ são semelhantes; em particular, ∠OAB=∠OB´A´ e ∠OBA=∠OA´B´

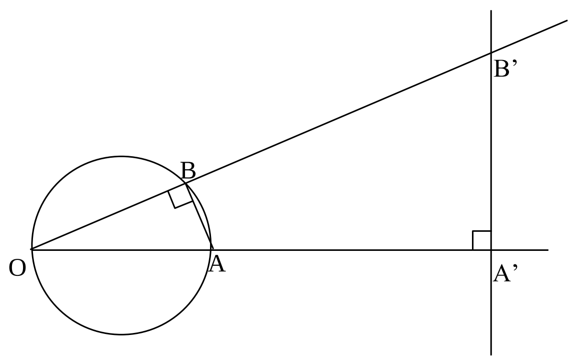


☠ Mas o segmento A´B´ **não é** o inverso do segmento AB!!

Propriedade 2. (Distância entre pontos transformados)

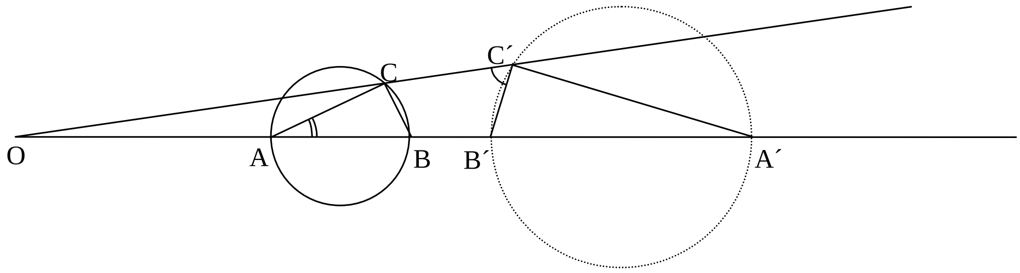
$$\overline{A'B'} = \frac{k^2}{\overline{OA}.\overline{OB}}\,\overline{AB}$$

Propriedade 3. O inverso de um círculo de diâmetro OA (passando pelo pólo O) é uma reta perpendicular a OA.



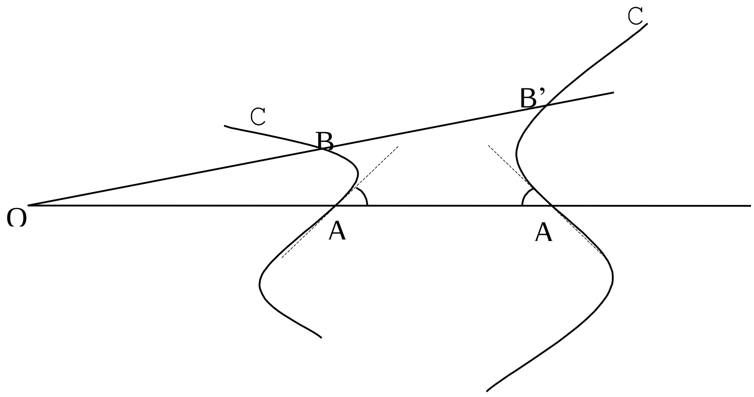
Corolário. O inverso de uma reta *r* (que não passa pelo pólo O) é uma circunferência de centro C (passando por O) tal que a reta OC é perpendicular a *r*.

Propriedade 4. O inverso de um círculo (de diâmetro AB tal que $O \in \overrightarrow{AB}$) é o círculo de diâmetro A´B´.

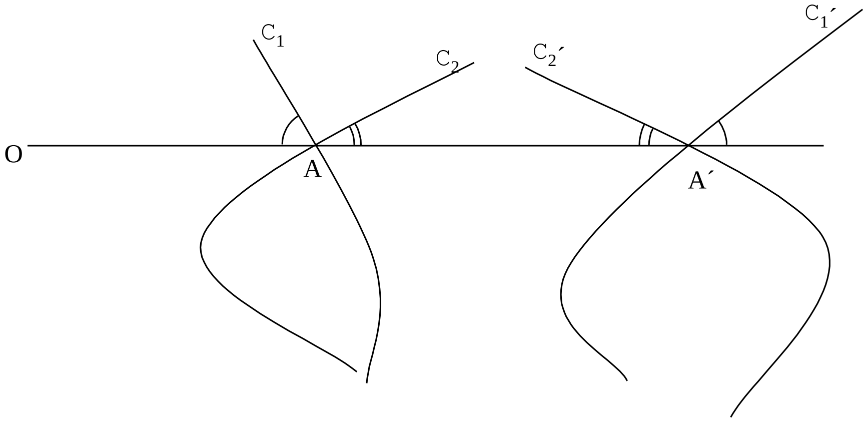


☠ O centro do círculo transformado **não é** o transformado do centro do círculo original. Isto é, o ponto médio de A´B´ **não é** o transformado do ponto médio de AB!!!

Propriedade 5a. Seja A um ponto qualquer numa curva $\mathcal{C}$. O ângulo entre a curva $\mathcal{C}$ e a reta $\overleftrightarrow{OA}$ é igual ao ângulo entre a curva $\mathcal{C}'$ e a reta $\overleftrightarrow{OA'}(\equiv \overleftrightarrow{OA})$.



Propriedade 5b. Se duas curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ cortam-se no ponto A fazendo um ângulo α, suas inversas $\mathcal{C}_1$´ e $\mathcal{C}_2$´ cortam-se em A´ fazendo o mesmo ângulo α.



Corolários. Inversões transformam círculos tangentes em círculos tangentes (ou círculo e reta tangentes, ou retas paralelas), círculos ortogonais em círculos ortogonais (ou círculo e reta ortogonais, ou retas perpendiculares); ...

II: Problemas

1. Seja ABC um triângulo qualquer e AP a bissetriz do ângulo A (com P em BC). Mostre que $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}$.

2. Sejam a, b, c e d os lados consecutivos de um quadrilátero qualquer (não-entrecruzado) e α e β as suas diagonais. Mostre que $ac+bd \geq \alpha\beta$, e que a igualdade somente ocorre se os vértices do quadrilátero forem concíclicos.

3. Sejam a, b, c e d os lados consecutivos de um quadrilátero ABCD e α e β as suas diagonais. Suponha que os círculos circunscritos aos triângulos ABC e ACD são ortogonais. Mostre que $\alpha^2\beta^2=a^2c^2+b^2d^2$.

4. As circunferências C1 e C3 são tangentes em P, assim como as circunferências C2 e C4. C1 intersecta C2 e C4 em A e C, respectivamente, enquanto C3 intersecta C2 e C4 em B e D. Mostre que, se A, B, C e D são concíclicos então C1 e C2 são ortogonais, assim como C2 e C3, C3 e C4, C4 e C1.

5. (IMO 96 – Índia) No interior de um triângulo ABC, marca-se um ponto P tal que $\angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$. Mostre que as bissetrizes de ACP e de ABP se cortam sobre o segmento AP.

6. Sejam A, B e C três pontos colineares tais que AB=BC=2. Considere as circunferências $\Gamma 0$ de diâmetro AC, $\Gamma 1$ de diâmetro AB e $\Gamma 2$ de diâmetro BC. Seja C1 uma circunferência tangente interiormente a $\Gamma 0$, exteriormente a $\Gamma 1$ e $\Gamma 2$. A partir daí, construa uma seqüência de circunferências Cn tais que Cn é sempre tangente interiormente a $\Gamma 0$ e exteriormente a $\Gamma 1$ e C(n-1). Mostre que o raio de Cn é racional para qualquer n.

7. (Porismo de Steiner) Considere duas circunferências $\Gamma 1$ e $\Gamma 2$ com $\Gamma 1$ interior a $\Gamma 2$.
   (a) Encontre um ponto A na reta que une os centros de $\Gamma 1$ e $\Gamma 2$ tal que as tangentes traçadas de A a $\Gamma 1$ e $\Gamma 2$ têm o mesmo comprimento *m*.
   (b) Conclua que o círculo de centro A e raio *m* é ortogonal a $\Gamma 1$ e $\Gamma 2$; encontre uma inversão que transforme $\Gamma 1$ e $\Gamma 2$ em círculos concêntricos.
   (c) Construa uma circunferência C1 tangente interiormente a $\Gamma 2$ e exteriormente a $\Gamma 1$. A partir daí, construa uma seqüência de circunferências Cn tal que Cn é tangente interiormente a $\Gamma 2$, exteriormente a $\Gamma 1$ e C(n-1). Mostre que, se $Ck \equiv C1$ para algum valor de k e alguma posição de C1, então Ck = C1 para **qualquer outra** posição de C1