Quadriláteros Inscritíveis e Potência de Ponto

Deborah Barbosa Alves
deborah.alves@gmail.com

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência Γ_1, P o ponto de interseção das diagonais AC e BD e M o ponto médio de CD. A circunferência Γ_2 que passa por P e é tangente a CD em M corta BD e AC nos pontos Q e R, respectivamente. Seja S o ponto do segmento BD tal que $BS = DQ$. A paralela a AB por S corta AC em T. Prove que $AT = CR$.

Problema 2. (IMO 2009) Seja ABC um triângulo com circuncentro O. Sejam P e Q pontos no interior dos lados AC e AB respectivamente. Sejam K, L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ respectivamente, e Γ o círculo que passa por K, L e M. Suponha que a reta PQ é tangente ao círculo Γ. Prove que $OP = OQ$.

Problema 3. (Shortlist IMO 2009) Seja ABC um triângulo. O incírculo de ABC toca os lados AB e AC nos pontos Z e Y respectivamente. Seja G o ponto de interseção das retas BY e CZ, e sejam R e S pontos tais que os quadriláteros $BCYR$ e $BCSZ$ são paralelogramos. Prove que $GR = GS$.

Problema 4. (Rioplatense 2002) Dado um quadrilátero $ABCD$, constroem-se triângulos isósceles ABK, BCL, CDM e DAN, com bases sobre os lados AB, BC, CD e DA, tais que K, L, M e N sejam pontos distintos, três a três não colineares. A perpendicular à reta KL traçada por B intersecta a perpendicular à reta LM traçada por C no ponto P; a perpendicular à reta MN traçada por D intersecta a perpendicular à reta NK traçada por A no ponto Q. Demonstre que se P e Q são distintos, então PQ é perpendicular a KM.

Problema 5. (USAMO 1990) Um triângulo acutângulo ABC é dado no plano. O círculo com diâmetro AB intersecta a altura CC' e seu prolongamento nos pontos M e N, e o círculo com diâmetro AC intersecta a altura BB' e seu prolongamento em P e Q. Mostre que os pontos M, N, P e Q são concíclicos.

Problema 6. (Ibero 1999) Um triângulo acutângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O. As alturas do triângulo são AD, BE e CF. A reta EF intersecta a circunferência em P e Q.

a) Prove que AO é perpendicular a PQ.

b) Se M é o ponto médio de BC, prove que $AP^2 = 2 \cdot AD \cdot OM$.

Problema 7. (IMO 2010) Seja P um ponto no interior do triângulo ABC (com $CA \neq CB$). As retas AP, BP e CP intersectam o circuncírculo Γ de ABC em K, L e M respectivamente. A reta tangente a Γ em C intersecta a reta AB em S. Mostre que se $SC = SP$ então $MK = ML$.

Problema 8. (Shortlist IMO 2008) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P e Q pontos em $ABCD$ tais que $PQDA$ e $QPBC$ são inscritíveis. Suponha que exista um ponto E no segmento PQ tal que $\angle PAE = \angle QDE$ e $\angle PBE = \angle QCE$. Prove que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

Problema 9. (IMO 2008) Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. A circunferência Γ_A com centro no ponto médio de BC e que passa por H intersecta a reta BC em A_1 e A_2. Os pontos B_1, B_2, C_1 and C_2 são definidos analogamente. Prove que os seis pontos são concíclicos.

Problema 10. Seja P um ponto qualquer interior ao círculo Γ. Tracemos por P duas cordas quaisquer AA' e BB' perpendiculares e pelo mesmo ponto tracemos PC perpendicular a AB, $C \in$.

i) Prove que a reta PC passa pelo ponto médio I de $A'B'$.

ii) Prove que o produto $PC \cdot PI$ permanece constante quando as cordas variam.