Inversão

Deborah Barbosa Alves
deborah.alves@gmail.com

Problema 1. Seja Γ uma circunferência e P um ponto externo a Γ. As tangentes a Γ por P tocam Γ em A e B. Sejam C e D pontos em Γ tal que P está na reta CD e seja M o ponto médio de AB. Prove que $\angle CMB = \angle DMB$.

Problema 2. Seja $ABCD$ um quadrilátero bicêntrico de incentro I e circuncentro O, e seja X a interseção das diagonais AC e BD. Prove que I, O e X são colineares.

Problema 3. O incírculo de um triângulo ABC toca os lados BC, CA, AB nos pontos A_1, B_1, C_1 respectivamente. Sejam A_0, B_0, C_0 os pontos médios de B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 respectivamente. Prove que o incentro de ABC, o circuncentro de ABC e o circuncentro de $A_0B_0C_0$ são colineares.

Problema 4. (Construção da Simediana) Seja ABC um triângulo de circuncírculo Γ. Seja P o ponto de interseção das retas tangentes a Γ tangentes em B e C. Prove que AP é a simediana de ABC correspondente ao vértice A.

Problema 5. Seja ABC um triângulo e S uma circunferência tangente aos lados CA e CB em D e E, respectivamente, e tangente internamente ao circuncírculo do $\triangle ABC$. Prove que o incentro do $\triangle ABC$ é o ponto médio de DE.

Problema 6. (RMMS 2011) Um triângulo ABC está inscrito num círculo ω. Uma reta variável l paralela a BC intersecta os segmentos AB e AC nos pontos D e E respectivamente, e intersecta ω nos pontos K e L (onde D está entre K e E). O círculo γ_1 é tangente aos segmentos KD e BD e também tangente a ω, enquanto o círculo γ_2 é tangente aos segmentos LE e CE e também tangente a ω. Determine o lugar geométrico, enquanto l varia, do encontro das tangentes internas comuns a γ_1 e γ_2.

Problema 7. Considere dois círculos Γ e Γ_1 tangentes internamente no ponto O (Γ está dentro de Γ_1). Por um ponto A no círculo Γ traçamos uma tangente que corta o círculo Γ_1 nos pontos B e C. Prove que a reta OA é bissetriz do ângulo $\angle BOC$.

Problema 8. (Teorema de Ptolomeu) Sejam A, B, C, D são quatro pontos coplanares, então $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$, com igualdade se, e somente se, A, B, C, D são colineares ou concíclicos.

Problema 9. Seja ABC um triângulo e M um ponto no plano. As retas que passam pelo ortocentro H de ABC e são perpendiculares a MA, MB, MC intersectam BC, CA, AB em P, Q, R respectivamente. Prove que P, Q, R são colineares e essa reta é perpendicular a MH.

Problema 10. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As retas paralelas a AD e CD que passam pelo ortocentro H do triângulo ABC intersectam AB e BC respectivamente em P e Q. Prove que a reta perpendicular a PQ que passa por H também passa pelo ortocentro do triângulo ACD

Problema 11. Seja ABC um triângulo com ortocentro H. Sejam D, E, F os pontos médios dos lados BC, AC, AB respectivamente. Seja P a interseção de BC com a perpendicular a HD traçada por A, Q a interseção de AC com a perpendicular a HE traçada por B, R a interseção de AB com a perpendicular a HF traçada por C. Prove que P, Q, R são colineares e essa reta é perpendicular a reta de Euler do triângulo ABC.

Problema 12. Seja ABC um triângulo que não é isósceles e H seu ortocentro. Seja A_1, B_1, C_1 os pés das alturas AH, BH, CH respectivamente. Seja A_2, B_2, C_2 as projeções de H nos segmentos B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 respectivamente. Prove que

i) Os circuncírculos dos triângulos HA_1A_2, HB_1B_2, HC_1C_2 tem um segundo ponto de interseção que não é H

ii) Os circuncírculos dos triângulos HAA_2, HBB_2, HCC_2 tem um segundo ponto de interseção que não é H