IX OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
18 DE NOVEMBRO DE 2006

PROBLEMA 1. [4 pontos] Sejam *m* e *n* números inteiros maiores que 1. Definem-se os conjuntos

$$P_m = \left\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\right\} \text{ e } P_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Encontrar a distância entre P_m e P_n, que é definida como

$$\min\left\{|a-b| : a \in P_m, b \in P_n\right\}.$$

PROBLEMA 2. [5 pontos] Demonstrar que para qualquer inteiro positivo *n* e quaisquer números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ a equação

$$a_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 \operatorname{sen}(2x) + \ldots + a_n \operatorname{sen}(nx) = b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + \ldots + b_n \cos(nx)$$

tem ao menos uma raiz real.

PROBLEMA 3. [5 pontos] Sejam $p_1(x) = p(x) = 4x^3 - 3x$ e $p_{n+1} = p(p_n(x))$ para cada *n* inteiro positivo.

Denotamos por $A(n)$ o conjunto de todas as raízes reais da equação $p_n(x) = x$.

Demonstrar que $A(n) \subseteq A(2n)$ e que cada produto de dois elementos de $A(n)$ é a média aritmética de dois elementos de $A(2n)$.

PROBLEMA 4. [6 pontos] Demonstrar que para qualquer intervalo de números reais [*a*, *b*] e qualquer número inteiro positivo *n* existem um número inteiro positivo *k* e uma partição do intervalo dado

$$a = x(0) < x(1) < x(2) < \ldots < x(k-1) < x(k) = b$$

tais que

$$\int_{x(0)}^{x(1)} f(x)dx + \int_{x(2)}^{x(3)} f(x)dx + \ldots = \int_{x(1)}^{x(2)} f(x)dx + \int_{x(3)}^{x(4)} f(x)dx + \ldots$$

para todo polinômio *f* com coeficientes reais de grau menor que *n*.

PROBLEMA 5. [7 pontos] Um *n*-ágono regular está inscrito num círculo de raio 1. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ as distâncias de um dos vértices do polígono a todos os outros vértices. Demonstrar que

$$\left(5 - a_1^2\right)\left(5 - a_2^2\right)\ldots\left(5 - a_{n-1}^2\right) = F_n^2,$$

onde F_n é *n*-ésimo termo da seqüência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8…

PROBLEMA 6. [7 pontos]

Sejam $x_0(t)=1, x_{k+1}(t)=(1+t^{k+1})x_k(t),$ para todo $k\geq 0; y_{n,0}(t)=1, y_{n,k}(t)=\frac{t^{n-k+1}-1}{t^k-1}\cdot y_{n,k-1}(t),$ para $n\geq 0, 1\leq k\leq n.$

Demonstrar que $\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j x_{n-j-1}(t)y_{n,j}(t)=\frac{1-(-1)^n}{2},$ para todo $n\geq 1.$

PROBLEMA 7. [7 pontos]

Consideramos o grupo multiplicativo $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^{2006^k}=1 \text{ e } 0<k\in\mathbb{Z}\}$ de todas as raízes complexas da unidade de ordem 2006^k para todos os números inteiros positivos *k*. Encontrar o número de homomorfismos $f:A\to A$ que satisfazem a condição:

$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$ para todos os elementos $x\in A.$