X OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
5 de Novembro de 2007

PROBLEMA 1. [4 pontos]

Para cada par de inteiros positivos (i, k) com $1 \le i \le k$ define-se a transformação linear $P_{i,k} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ como

$$P_{i,k}\left(\left(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_k\right)\right) = \left(\left(a_1, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_k\right)\right).$$

Demonstre que para todo $n \ge 2$ e para qualquer conjunto de n – 1 vetores linearmente independentes $v_i, v_2, ..., v_{n-1}$ em $\mathbb{R}^n$, existe um inteiro $k, 1 \le k \le n,$ de forma que os vetores $P_{k,n}(v_1), P_{k,n}(v_2), ..., P_{k,n}(v_{n-1})$ são linearmente independentes.

PROBLEMA 2. [5 pontos]

Demonstre que para todo n inteiro positivo e para todo número real $0 \le x \le 1$ se verifica a desigualdade

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)^n - (1-x)^n \le \frac{x}{2}.$$

PROBLEMA 3. [6 pontos]

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua e periódica. Demonstre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade

$$\int_0^T \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}\, dx \ge T,$$

onde T é o período de $f(x)$.

PROBLEMA 4. [6 pontos]

Temos a seqüência infinita $a_1, a_2, ...,$ onde os termos a_n pertencem todos ao conjunto $\{1, 2\}$. Dizemos que um número natural de n dígitos é *bom* se a sua representação decimal é da forma $a_r a_{r+1} ... a_{r+(n-1)}$ para algum inteiro positivo r. Suponha que há pelo menos 2008 números bons de um milhão de dígitos. Demonstrar que há pelo menos 2008 números bons de 2007 dígitos.

PROBLEMA 5. [6 pontos]

Encontre todos os pares de polinômios $f, g \in \mathbb{C}[x]$ com coeficientes complexos tais que valem as igualdades

$$f\left(f(x)\right) - g\left(g(x)\right) = 1 + i,$$
$$f\left(g(x)\right) - g\left(f(x)\right) = 1 - i$$

para todo $x \in \mathbb{C}$.

PROBLEMA 6. [7 pontos]

Sejam F um corpo de característica diferente de $2, F^* = F \setminus \{0\}$ seu grupo multiplicativo e T o subgrupo de F^* que consiste de todos seus elementos de ordem finita.
Demonstre que se T é finito então T é cíclico de ordem par.

PROBLEMA 7. [7 pontos]

Definimos a *altura* de um número natural a como a fração $\dfrac{s(a)}{a}$, onde $s(a)$ é a soma de todos os divisores positivos de a. Demonstre que para qualquer par de números naturais N, k existe um b natural tal que a altura de cada um dos números b, $b + 1$, ..., $b + k$ é maior que N.