XII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
7 de Novembro de 2009

PROBLEMA 1. [4 pontos]
Uma linha reta passa por um vértice de um triângulo não degenerado e corta este triângulo em dois triângulos semelhantes com uma razão entre os lados igual a $\sqrt{3}$. Encontrar os ângulos do triângulo dado.

PROBLEMA 2. [5 pontos]
Sejam $x_1, ..., x_n$ vetores não nulos de um espaço vetorial V e $\varphi : V \to V$ um operador linear deste espaço tais que $\varphi x_1 = x_1, \varphi x_k = x_k - x_{k-1}$ para $k = 2, 3, ..., n.$
Demonstrar que o conjunto de vetores $x_1, ..., x_n$ é linearmente independente.

PROBLEMA 3. [5 pontos]
Sejam $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$ e f definida como: $\left\{(x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2 | c - dx - ey > 0\right\} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x, y) = (ax)(by)(c - dx - ey)$. Encontrar seu valor máximo.

PROBLEMA 4. [6 pontos]
Dados inteiros positivos m e n, dizemos que a função $f : [0, m] \to \mathbb{R}$ é $(m, n) -$ *escorregadia* se possui as seguintes propriedades:

i) f é contínua;
ii) $f(0) = 0, f(m) = n;$
iii) Se $t_1, t_2 \in [0, m]$ com $t_1 < t_2$ são tais que $t_2 - t_1 \in \mathbb{Z}$ e $f(t_2) - f(t_1) \in \mathbb{Z},$ então $t_2 - t_1 \in \{0, m\}$.

Determinar os valores de m, n para os quais existe uma função f que seja (m, n) – escorregadia.

PROBLEMA 5. [7 pontos]
Sejam $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$ os conjuntos dos naturais e dos inteiros positivos respectivamente.
Definimos uma relação $\in'$ em $\mathbb{N}$ por $a \in' b$ se, e só se, o a-ésimo bit na representação binária de b é 1.
Definimos uma relação $\tilde{\in}$ em $\mathbb{N}^*$ por $a \tilde{\in} b$ se, e somente se, b é múltiplo do a-ésimo número primo p_a.

i) (2 pontos) Demonstrar que não existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tal que $a \in' b \Leftrightarrow f(a) \tilde{\in} f(b)$.

ii) (5 pontos) Demonstrar que não existe uma bijeção $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tal que $\left(a \in' b \text{ ou } b \in' a\right) \Leftrightarrow \left(f\left(a\right) \tilde{\in} f\left(b\right) \text{ ou} f\left(b\right) \tilde{\in} f\left(a\right)\right)$.

PROBLEMA 6. [7 pontos]

Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_d, \beta_1, ..., \beta_e \in \mathbb{C}$ tais que os polinômios

$$f_1(x) = \prod_{i=1}^{d}\left(x - \alpha_i\right) \text{ e } f_2(x) = \prod_{i=1}^{e}\left(x - \beta_i\right)$$

têm coeficientes inteiros. Suponhamos que existem polinômios $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\left[x\right]$ tal que $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$. Demonstrar que

$$\left| \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{e} \left(\alpha_i - \beta_j\right) \right| = 1.$$

PROBLEMA 7. [8 pontos]

Seja G um grupo tal que todo subgrupo de G é subnormal. Suponhamos que existe N subgrupo normal de G, tal que $Z(N)$ é diferente de $\{e\}$ e G/N é cíclico. Demonstrar que $Z(G)$ é diferente de$\{e\}$. ($Z(G)$ denota o centro de G).

Nota: Um subgrupo H de G é subnormal se existem subgrupos $H_1, H_2, ..., H_m = G$ de G com $H \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd ... \lhd H_m = G$($\lhd$ denota subgrupo normal, assim, dizemos que $H \lhd G$ se, para quaisquer $h \in H, g \in G,$ temos $g^{-1}hg \in H$).