OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA 2011
26 de Novembro de 2011

PROBLEMA 1 (4 pontos)
Sejam r e s inteiros positivos. Cada um dos números $a_1, a_2, ..., a_r, b_1, ..., b_s$ é 1 ou 2.
Considere os números que têm as seguintes representações decimais:

$$a = 0, a_1 a_2 ... a_r a_1 a_2 ... a_r ...$$
$$b = 0, b_1 b_2 ... b_s b_1 b_2 ... b_s ...$$
$$x = 0, a_1 a_2 ... a_r b_1 b_2 ... b_s$$
$$y = 0, b_1 b_2 ... b_s a_1 a_2 ... a_r$$

Demonstre que $a \le b$ se e somente se $x \le y$.

Nota: Os números a e b têm representação decimal periódica. Os números x e y têm representação decimal finita.

PROBLEMA 2 (4 pontos)
O cubo n-dimensional C se decompõe em 2^n caixas retangulares menores por n planos $P_1, P_2, ..., P_n$ de tal forma que cada eixo de C é perpendicular a exatamente um desses planos. As 2^n caixas estão pintadas nas cores branco e preto de tal forma que cada par de caixas vizinhas têm uma cor diferente.
Suponhamos que a soma dos volumes das caixas pintadas de preto é igual à soma dos volumes das caixas pintadas de branco. Demonstre que pelo menos um dos planos $P_1, P_2, ..., P_n$ bissecta C (i.e., divide C em duas caixas congruentes).

PROBLEMA 3 (5 pontos)
Seja $n \ge 2$ um inteiro. Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ um polinômio com n raízes inteiras distintas entre si e distintas de 1. Demonstre que:

$$\frac{n + \sum_{j=0}^{n-1} j a_j}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j} < 1 + \ln n.$$

PROBLEMA 4 (5 pontos)

Os números complexos a, b e c são tais que $a|bc|+b|ca|+c|ab|=0.$ Demonstre que

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$

PROBLEMA 5 (6 pontos)

Existem três círculos $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ na esfera unitária S de $\mathbb{R}^3$. Suponhamos que para cada par de índices (i, j) com $1 \leq i < j \leq 3$ existem dois círculos máximos C_{ij} e C_{ji} de S tais que ambos são tangentes a ω_i e ω_j e nenhum dos dois separa ω_i e ω_j. Os círculos máximos C_{ij} e C_{ji} se intersectam nos pontos P_{ij} e P_{ji}.

Demonstre que os pontos $P_{12}, P_{23}, P_{31}, P_{13}, P_{32}$ e P_{21} estão num mesmo círculo máximo de S.

PROBLEMA 6 (7 pontos)

Os inteiros não negativos a, b, c e d satisfazem $2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2=d^2$.
Considere o conjunto X dos inteiros que podem ser escritos como a soma dos quadrados de dois inteiros.
Demonstre que a, b e c estão todos em X se, e somente se, o máximo divisor comum $mdc(a,b,c)$ de a, b e c está em X.

PROBLEMA 7 (8 pontos)

Considere

$$F=\left\{ f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ contínua: } \forall x\in[0,1], \left| \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} \right| \leq 1 \right\}.$$

Determine

$$\sup_{f\in F} \left| \int_0^1 f \right|.$$