16ª OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
23 de novembro de 2013

PROBLEMA 1: (3 pontos)
Uma cidade X tem 2013 pessoas. Quando as pessoas são ordenadas de forma crescente pela quantidade de dinheiro que possuem, a n-ésima pessoa tem n vezes a quantidade de dinheiro que tem a mais pobre. Em certo momento específico, todos os cidadãos de X decidem fazer o seguinte: cada um reparte equitativamente a maior parte possível da sua riqueza entre todos os cidadãos de X (de modo que cada cidadão de X, inclusive ele mesmo, receba a mesma quantidade inteira de dinheiro) e dá o que sobra à cidade vizinha Y.

Sabemos que a quantidade de dinheiro da pessoa mais pobre de X não é um múltiplo de 3, nem de 11, nem de 61. Determina a quantidade de dinheiro total que foi dada à cidade Y.

PROBLEMA 2: (4 pontos)
Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita com produto interno e $S \subseteq V$ um subespaço não trivial de dimensão infinita. Seja $x \in V \setminus S$ e W o espaço gerado por x.
Determine a dimensão de $\left(S \oplus W\right) \cap S^{\perp}$.

PROBLEMA 3: (4 pontos)
Consideremos o número

$$\alpha = 0{,}123456789101112...$$

obtido escrevendo todos os inteiros positivos, um após o outro, depois da vírgula decimal.
Mostre que para todo inteiro positivo k temos que o conjunto

$$A_k := \left\{10^{nk}\alpha - \left\lfloor 10^{nk}\alpha \right\rfloor : n \in \mathbb{N}\right\}$$

é denso em $\left[0,1\right]$.

Nota: $\left\lfloor x \right\rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

PROBLEMA 4: (5 pontos)
Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de centro O_1 e raio R, e circunscrito a outra circunferência de centro O_2 e raio r. Mostre que

$$\left(O_1O_2\right)^2 = R^2 - 2rR + r\left(2r - r_1 - r_2\right)$$

onde r_1 e r_2 são os raios das circunferências inscritas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente.

PROBLEMA 5: (5 pontos)

Os elementos de um grupo finito comutativo G com $|G| = N$ são pintados com três cores: amarelo, azul e vermelho, de tal modo que cada cor é utilizada no máximo $N/2$ vezes.

Seja A o conjunto de todas as quádruplas (ordenadas) $(x, y, z, w) \in G^4$, tais que $xyzw = e$ e x, y, z, w têm a mesma cor. Analogamente, seja B o conjunto de todas as quádruplas (ordenadas) $(x, y, z, w) \in G^4$ tais que $xyzw = e$, os elementos x, y têm a mesma cor, e z e w também têm a mesma cor, porém as duas cores são distintas. Demonstre que $|A| \le |B|$.

Obs. e denota o elemento neutro de G.

PROBLEMA 6: (6 pontos)

Uma função real $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é limitada e diferenciável. Além disso, satisfaz a relação

$$f(x)\, f'(x) \ge \operatorname{sen}(x).$$

Existe $\lim_{x \to \infty} f(x)$?

PROBLEMA 7: (8 pontos)

Antônio e Bela jogam o seguinte jogo: Antônio escolhe um inteiro positivo k e depois Bela um segundo inteiro positivo n. Começando por Antônio, eles colocam alternadamente pontos num plano (cada um diferente de todos os anteriores) até que cada um tenha colocado n pontos. Bela ganha se o número de retas que passam por pelo menos dois dos pontos colocados, é divisível por k. Caso contrário, ganha Antônio. Qual jogador possui uma estratégia vencedora?