



XX Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária 2017

1. (3 pontos). Seja $n \geq 1$ e sejam k_0, \dots, k_{n+1} inteiros positivos. Prove que existem inteiros m_1, \dots, m_n tais que

$$\text{mdc}(k_0, \dots, k_{n+1}) = \text{mdc}(k_0 + m_1 k_1 + \dots + m_n k_n, k_{n+1}).$$

Nota: mdc denota o máximo divisor comum.

2. (3 pontos). Seja $S = \{1, 2, 3, \dots, 2017\}$. Um jardineiro planta grama em S da seguinte forma: em cada dia o jardineiro pode plantar grama em apenas um elemento de S , a sua escolha; além disso, se o número i está coberto de grama, no dia seguinte esta grama terá se estendido e cobrirá os números $i - 1$, i , e $i + 1$ (desde que os índices correspondentes estejam em S). Determine a menor quantidade de dias que o jardineiro precisa para conseguir cobrir todo o S de grama.

3. (4 pontos). Sejam P, Q, R pontos colineares no plano, com Q estritamente entre P e R , distinto do ponto médio de PR . Seja \mathcal{H} o ramo da hipérbole, com focos P e R , que passa por Q . Determine o lugar geométrico dos incentros dos triângulos HPR ao variar o ponto H sobre $\mathcal{H} \setminus \{Q\}$.

Nota: O incentro de um triângulo é o centro de seu círculo inscrito.

4. (5 pontos). Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem $f(x)f(y) = f(x + y)$ e $f(x) \geq 1 + x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
5. (6 pontos). Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de números reais limitada. Para $\{x_{n_k}\}$ e $\{x_{m_k}\}$ duas subseqüências, definimos a relação de equivalência $\{x_{n_k}\} \sim \{x_{m_k}\}$, se $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{m_k}) = 0$. Seja \mathcal{C} o conjunto das classes de equivalência. Prove que $|\mathcal{C}| = 1$ ou \mathcal{C} é não enumerável.
6. (7 pontos). Seja K um corpo finito, $K \neq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, e considere os conjuntos $A = \{a^2 : a \in K\}$, $B = \{b^4 : b \in K\}$. Prove que todo elemento de K pode ser escrito como soma de um elemento de A com outro de B .

7. (7 pontos). Sejam $a < b < c < d$ números reais tais que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-a| \cdot |x-b| \cdot |x-c| \cdot |x-d|}}.$$

Prove que

$$\int_a^b f = \int_c^d f.$$