XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Cada problema vale 10 pontos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem exatamente quatro domingos cada um. Prove que um destes meses é fevereiro.

PROBLEMA 2

Num quadro-negro são escritos três inteiros. Começa-se, então, uma sequência de movimentos onde, em cada passo, apaga-se um deles e escreve-se em seu lugar a soma dos outros dois diminuída de uma unidade. Após vários movimentos, estão escritos no quadro os números 17, 75 e 91. É possível que no início estejam escritos no quadro :

a) 2, 2, 2 ?
b) 3, 3, 3 ?

PROBLEMA 3

Seja $ABCD$ um quadrado. Escolhemos pontos M, N, P, Q respectivamente sobre AB, BC, CD e DA, de modo que as circunferências circunscritas aos triângulos MBN e PDQ sejam tangentes exteriormente. Mostre que $MN + PQ \geq AC$.

PROBLEMA 4

Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de $(3, 6, 9, 12)$ (isto é, $\{a, b, c, d\} = \{3, 6, 9, 12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

PROBLEMA 5

Um professor de matemática passou aos seus alunos a adição $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$ onde A, B, C e D são inteiros positivos, as frações estão simplificadas ao máximo e os denominadores são números primos entre si. Os alunos adicionaram as frações tirando o mínimo múltiplo comum dos denominadores das parcelas e escrevendo este como o denominador do resultado. Mostre que a fração que os alunos encontraram como resultado está simplificada.

PROBLEMA 6

Determine todos os inteiros positivos n para os quais é possível montarmos um retângulo 9×10 usando peças $1 \times n$.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE - NÍVEL 2

SOLUÇÃO PROBLEMA 1

Se nenhum destes meses for fevereiro, o número total de dias não pode ser menor que 91 = 7. 13 e portanto o número total de Domingos não poderia ser menor do que 13.

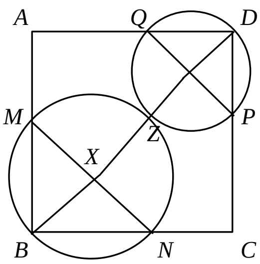
SOLUÇÃO PROBLEMA 2

a) Estão escritos inicialmente 3 números pares. Quando um deles é apagado, é escrito em seu lugar um número ímpar. Após o 1º movimento ficam então dois números pares e um número ímpar. Se apagarmos agora o número ímpar, surgirá em seu lugar outro númro ímpar e se apagarmos um número par aparecerá em seu lugar outro número par. Deste modo, após qualquer número de movimentos restarão dois números pares e um número ímpar e portanto, não é possível termos no final os três números ímpares 17, 75 e 91.

b) Sim, uma possível sequência de movimentos é : 3, 3, 3 $\rightarrow$ 5, 3, 3 $\rightarrow$ 5, 3, 7 $\rightarrow$ 5, 11, 7 $\rightarrow$ 17, 11, 7 $\rightarrow$ 17 , 11, 27 $\rightarrow$ 17, 43, 27 $\rightarrow$ 17, 43, 59 $\rightarrow$17, 75, 59 $\rightarrow$ 17, 75, 91.

SOLUÇÃO PROBLEMA 3

A figura abaixo representa a situação, onde X e Y são os pontos médios dos segmentos MN e PQ e Z é o ponto de tangência das circunferências. Então, como $\angle MBN = \angle PDQ = 90°$, segue que $BX = MX = NX = XZ$ e $DY = QY = YP = YZ$. Assim, $MN + PQ = BX + XZ + ZY + YD \geq BD = AC$.



SOLUÇÃO PROBLEMA 4

Temos $3^a \cdot 6^b \cdot 9^c \cdot 12^d = 2^{b+2d} \cdot 3^{a+b+2c+d}$. Para ($a$, b, c, d) dados, o maior n possível é $mdc\{b+2d, a+b+2c+d\} \leq b+2d$. Note que b + 2d é máximo (com b e d elementos distintos de {3, 6, 9, 12}) quando d = 12 e b = 9. Neste caso, b + 2d = 33, e a + b + 2c + d = 21 + a + 2c. Tomando a = 6 e c = 3, temos também a + b + 2c + d = 33, que é obviamente o maior valor possível para n, obtido para (a, b, c, d) = (6, 9, 3, 12).

SOLUÇÃO PROBLEMA 5

Como os denominadores das frações são primos entre si, seu MMC é BD e assim, a fração resultante é $\frac{AD+CB}{BD}$. Suponhamos que esta fração não seja irredutível isto é, que exista algum número primo p que divida o numerador e o denominador desta fração. Como o produto BD é divisível por p, um dos seus termos, digamos B sem perda de generalidade o seja. Entretanto, uma das parcelas da soma AD + CB é divisível por p e como a soma, por hipótese, é divisível por p a parcela AD é também divisível por p. Portanto A ou D é divisível por p. No primeiro caso temos uma contradição com o fato da fração $\frac{A}{B}$ ser irredutível, no outro casos a contradição está no fato de que os denominadores das frações iniciais sempre são primos entre si.

SOLUÇÃO PROBLEMA 6

É claro que n deve ser no máximo 10 e dividir 90. Assim, restam para n as possibilidades 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10. Fora n = 6, é imediato que n pode assumir qualquer um dos outros valores acima. Começando a tentar montar o retângulo com peças 1 $\times$ 6 a partir de um canto, concluímos prontamente que a tarefa não é possível.