XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Cada problema vale 10 pontos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Nos extremos de um diâmetro de um círculo, escreve-se o número 1 (primeiro passo) . A seguir, cada semicírculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios escreve-se a soma dos números que estão nos extremos do semicírculo (segundo passo) . A seguir, cada quarto de círculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios coloca-se a soma dos números que estão nos extremos de cada arco (terceiro passo). Procede-se, assim, sucessivamente: sempre cada arco é dividido ao meio e em seu ponto médio é escrita a soma dos números que estão em seus extremos.
Determinar a soma de todos os números escritos após 1999 passos.

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um quadrado. Escolhemos pontos M, N, P, Q respectivamente sobre AB, BC, CD e DA, de modo que as circunferências circunscritas aos triângulos MBN e PDQ sejam tangentes exteriormente. Mostre que $MN + PQ \geq AC$.

PROBLEMA 3

Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de (3, 6, 9, 12) (isto é, $\{a, b, c, d\} = \{3, 6, 9, 12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

PROBLEMA 4

Determine todos os inteiros positivos n para os quais é possível montarmos um retângulo 9×10 usando peças $1 \times n$.

PROBLEMA 5

José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que dia 31 de agosto ele volte a usar o magenta?

PROBLEMA 6

Encontre as soluções inteiras de $x^3 - y^3 = 999$.

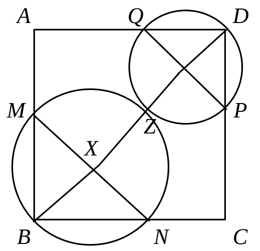
SOLUÇÕES SEGUNDA FASE - NÍVEL 3

SOLUÇÃO PROBLEMA 1

Seja $S(n)$ a soma dos termos em cada passo em um dos semicírculos. Observemos que $S(1) = 2$, $S(2) = 4$, e $S(3) = 10$. Deste modo, nos parece razoável conjecturar que $S(n) = 3^{n-1} + 1$. Claramente, $S(1) = 3^{1-1} + 1$. Os novos termos adicionados para formar L_{n+1} representam somas de dois termos consecutivos de L_n e cada termo de L_n, excetuando-se o primeiro e o último, aparece em exatamente duas destas somas. Daí, $S(n+1) = S(n) + 2(S(n) - 1) = 3S(n) - 2 = 3(3^{n-1} + 1) - 2 = 3^{(n+1)-1} + 1$. Levando em consideração o outro semicírculo, temos que a soma após os 1999 passos é igual a $2.(3^{1999-1} + 1) - 2 = 2.\ 3^{1998}$

SOLUÇÃO PROBLEMA 2

A figura abaixo representa a situação, onde X e Y são os pontos médios dos segmentos MN e PQ e Z é o ponto de tangência das circunferências. Então, como $\angle MBN = \angle PDQ = 90°$, segue que $BX = MX = NX = XZ$ e $DY = QY = YP = YZ$. Assim, $MN + PQ = BX + XZ + ZY + YD \geq BD = AC$.



SOLUÇÃO PROBLEMA 3

Temos $3^a \cdot 6^b \cdot 9^c \cdot 12^d = 2^{b+2d} \cdot 3^{a+b+2c+d}$. Para (a, b, c, d) dados, o maior n possível é $mdc\{b+2d, a+b+2c+d\} \leq b+2d$. Note que $b + 2d$ é máximo (com b e d elementos distintos de {3, 6, 9, 12}) quando $d = 12$ e $b = 9$. Neste caso, $b + 2d = 33$, e $a + b + 2c + d = 21 + a + 2c$. Tomando $a = 6$ e $c = 3$, temos também $a + b + 2c + d = 33$, que é obviamente o maior valor possível para n, obtido para $(a, b, c, d) = (6, 9, 3, 12)$.

SOLUÇÃO PROBLEMA 4

É claro que n deve ser no máximo 10 e dividir 90. Assim, restam para n as possibilidades 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10. Fora $n = 6$, é imediato que n pode assumir qualquer um dos outros valores acima. Começando a tentar montar o retângulo com peças 1×6 a partir de um canto, concluímos prontamente que a tarefa não é possível.

SOLUÇÃO PROBLEMA 5

Sejam m_n, a_n e c_n as probabilidades de que no dia n ele use óculos magenta, amarelo e ciano, respectivamente. Temos $m_1 = 1$, $a_1 = c_1 = 0$ e

$$m_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2},\ a_{n+1} = \frac{m_n + c_n}{2}, \text{ e } c_{n+1} = \frac{m_n + a_n}{2}$$

Como $a_n + c_n + m_n = 1$, temos $m_{n+1} = \frac{1 - m_n}{2}$. Assim, $m_n = \frac{1 - (-2)^{2-n}}{3}$., e em 31 de agosto a probabilidade de que ele volte a usar o magenta é $m_{31} = \frac{1 + 2^{-29}}{3}$.

SOLUÇÃO PROBLEMA 6

Temos $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 3^3 \cdot 37$. Suponhamos $x > y$.

Assim, os possíveis valores de $a = x - y$ são 1, 3, 9, 27, 37, $3 \cdot 37$, $9 \cdot 37$, $27 \cdot 37$ e cada valor permite fazer $y = x - a$ e precisamos apenas verificar se as raízes de $x^2 + x(x - a) + (x - a)^2 = \frac{999}{a}$ são inteiras.

Na verdade, alguns destes valores são obviamente inapropriados: $a = x - y \equiv x^3 - y^3 \equiv 0 \ (mod 3)$, donde os valores 1 e 37 podem ser descartados. Por outro lado, se $x - y \geq 3b$ temos $(x^3 - y^3) \geq 3b^3$, donde podemos descartar $a \geq 27$. Os dois valores restantes, 3 e 9, são de fato possíveis e dão as quatro soluções: $(10,1), (-1,-10), (12,9)$ e $(-9,-12)$.