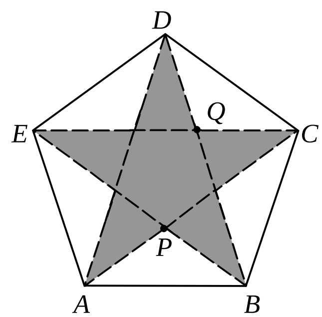
XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase – Nível 2

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Seja $ABCDE$ um pentágono regular tal que a estrela $ACEBD$ tem área 1. Sejam P interseção entre AC e BE e Q a interseção entre BD e CE. Determine a área de $APQD$.



PROBLEMA 2

Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade A para a cidade B, que é a cidade do reino mais longe de A. Após um tempo, ele foi expulso da cidade B para a cidade C do reino mais longe de B. Sabe-se que a cidade C não é a mesma cidade A. Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade A?

Nota: as distâncias entre as cidades são todas diferentes.

PROBLEMA 3

Adriano, Bruno e Carlos disputaram uma série de partidas de tênis de mesa. Cada vez que um jogador perdia, era substituído pelo que estava a esperar. A primeira partida foi disputada por Adriano e Bruno. Sabe-se que Adriano venceu 12 partidas e Bruno 21. Quantas vezes Adriano e Bruno se enfrentaram?

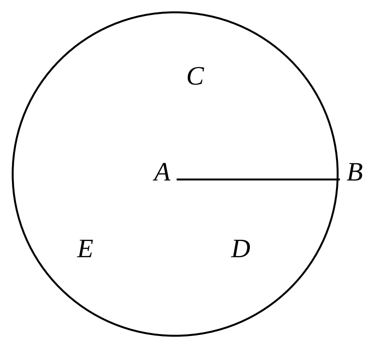
PROBLEMA 4

Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a 1.000.000ª. e a 3.000.000ª. casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Soluções da Terceira Fase – Nível 2

PROBLEMA 1
Veja solução do problema 1 do nível 3.

PROBLEMA 2
SOLUÇÃO DE EINSTEIN DO NASCIMENTO JÚNIOR (Fortaleza - CE)
Há dez cidades $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$.
Um chato da cidade A foi exilado para a cidade mais longe de A, a cidade B.
Como B é a cidade mais longe de A, pode-se dizer que se tomarmos A como sendo o centro de uma circunferência de raio AB, todas as cidades estarão dentro dos limites da circunferência, exceto a cidade B que estará em cima dela.



Como as distâncias entre as cidades não são iguais e o chato foi exilado para a cidade C que é a mais longe de B então $BC > AB$.
Da cidade C ele será exilado para a cidade D que é a mais longe de C e assim sucessivamente até chegar na cidade J onde teremos a seguinte verdade:

$AB < BC < CD < . . . < HI < IJ$.

Ao chegar nesse ponto vemos que A com certeza não é a cidade mais longe de J pois

AB = raio
AJ < raio
$AJ < AB$
$AB < IJ$
$AJ < IJ$

Logo ele irá para uma cidade diferente de A, e nunca retornará à cidade A.

PROBLEMA 3
SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (Rio de Janeiro - RJ)
Quando começa a série, já ocorre um encontro entre Adriano (A) e Bruno (B). Vamos chamar de V_A, V_B e V_C o número de vitórias de Adriano, Bruno e Carlos, respectivamente. Então ao final da série $V_A + V_B = 33$ e depois do 1º. jogo $V_A + V_B = 1$. Suponhamos que o segundo jogo seja $x \times C$. Chamemos de E o número de jogos $A \times B$.
Então no 2º. jogo $E = 1$. Enquanto C ganhar, $V_A + V_B$ e E permanecem constantes. Quando C perder, $V_A + V_B$ aumenta uma unidade. O próximo jogo será $A \times B$, aumentando $V_A + V_B$ e E em

uma unidade. Após este jogo, o próximo será $x \times C$. Ou seja, para que E aumente uma unidade, $V_A + V_B$ aumenta duas, e o aumento de um em E. Como no 2º. jogo $E = 1$ e falta que $V_A + V_B$ aumente 32 unidades, ocorrem 1 + 16 = 17 jogos $A \times B$.

PROBLEMA 4
SOLUÇÃO ALTERNATIVA DE HENRIQUE CHOCIAY (Pinhais – PR)

Para começar a desenvolver $\sqrt{2}$, utilizei o processo de extração que não utiliza tentativas (processo prático por aproximação).

$\sqrt{2}$	
-1	1,414
1.00	↑
-96	$1 \times 2 = 2\mathbf{4} \times \mathbf{4} \cong 100$
4.00	96 ↵
281	
1.1900	$14 \times 2 = 28\mathbf{1} \times \mathbf{1} \cong 400$
1.1296	
0060400	$141 \times 2 = 282\mathbf{4} \times \mathbf{4} \cong 11900$
	11296 ↵
	Deste lado, o número de casas sempre aumenta em 1 casa, nunca mais.
	(mesmo se houvesse um caso de $99999 \times 9 = 899991$ (só aumenta 1 casa) (entre 1.000.000 e 3.000.000)

Quando estivermos no número 1.000.000 de casas no multiplicador, teremos 999.999 casas decimais. Supondo que haja só 1 casa no resto nesta situação, depois de 1.000.000 de operações, teremos 1.999.999 casas decimais (1 milhão de zeros), 2.000.000 no multiplicador e 2.000.001 no resto, podendo obter número diferente de zero.
Em geral
O fato de, não podendo haver divisão, com o aumento das casas divisoras em 1 e do resto em 2 e as casas decimais serem menores que as divisoras em 1 torna impossível a obtenção desta seqüência de zeros entre as casas de 1.000.000 e 3.000.000.