

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase – Nível 3

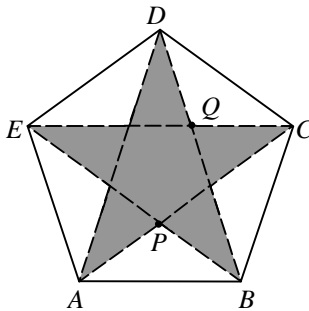
PRIMEIRO DIA

Instruções:

- ◆ A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- ◆ Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
- ◆ Você pode solicitar papel para rascunho.
- ◆ Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

Seja $ABCDE$ um pentágono regular tal que a estrela $ACEBD$ tem área 1. Sejam P interseção entre AC e BE e Q a interseção entre BD e CE . Determine a área de $APQD$.



PROBLEMA 2

Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a $1.000.000^a$. e a $3.000.000^a$. casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.

PROBLEMA 3

Temos um tabuleiro quadrado 10×10 .

Desejamos colocar n peças em casas do tabuleiro de tal forma que não existam 4 peças formando em retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro.

Determine o maior valor de n para o qual é possível fazer esta construção.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase – Nível 3

SEGUNDO DIA

Instruções:

- ◆ A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- ◆ Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
- ◆ Você pode solicitar papel para rascunho.
- ◆ Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 4

O planeta *Zork* é esférico e tem várias cidades. Dada qualquer cidade existe uma cidade antípoda (i.e., simétrica em relação ao centro do planeta).

Existem em *Zork* estradas ligando pares de cidades. Se existe uma estrada ligando as cidades P e Q então também existe uma estrada ligando as cidades P' e Q' , onde P' é a antípoda de P e Q' é a antípoda de Q . Além disso, estradas não se cruzam e dadas duas cidades P e Q sempre é possível viajar de P a Q usando alguma seqüência de estradas.

O preço da *Kriptonita* em *Urghs* (a moeda planetária) em duas cidades ligadas por uma estrada difere por no máximo 100 *Urghs*. Prove que existem duas cidades antípodas onde o preço da *Kriptonita* difere por no máximo 100 *Urghs*.

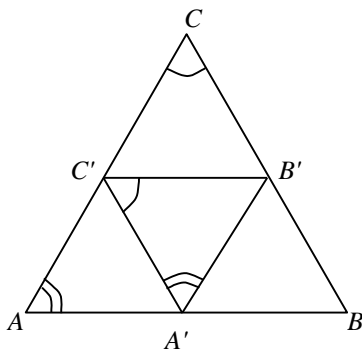
PROBLEMA 5

Em Tumbólia existem n times de futebol.

Deseja-se organizar um campeonato em que cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros. Todos os jogos ocorrem aos domingos, e um time não pode jogar mais de uma vez no mesmo dia. Determine o menor inteiro positivo m para o qual é possível realizar um tal campeonato em m domingos.

PROBLEMA 6

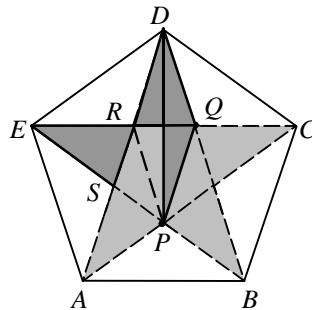
Dado triângulo ABC mostre como construir com régua e compasso um triângulo $A'B'C'$ de área mínima com $C' \in AC$, $A' \in AB$ e $B' \in BC$ tal que $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ e $\widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB}$.



XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Soluções da Terceira Fase – Nível 3

PROBLEMA 1

SOLUÇÃO DE HUGO PINTO IWATA (São José do Rio Preto - SP)



Como o pentágono e a estrela são regulares, o quadrilátero $APQD$ é um trapézio. A área do trapézio $APQD$ é igual à área do triângulo APD somada à do triângulo PQD . Como $BDRP$ também é um trapézio, $\overline{RP} \parallel \overline{QD}$, então a área de PQD é igual à de RQD . Como a estrela é regular, a área de RQD é igual à de ERS , então, a área de PQD é igual à de ERS . Assim a área do trapézio $APQD$ é igual à soma das áreas dos triângulos APD e ERS , que é igual à figura $APDRES$, que é exatamente metade da estrela toda.

Resposta: A área de $APQD$ é 0,5.

PROBLEMA 2

SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (Goiânia - GO)

Suponhamos, por absurdo, que todos os algarismos das casas decimais entre a 1.000.000^a. casa decimal e a 3.000.000^a. casa decimal de $\sqrt{2}$ fossem zero, então:

$$10^{2 \cdot 10^6} \lfloor 10^{10^6} \sqrt{2} \rfloor = \lfloor 10^{3 \cdot 10^6} \sqrt{2} \rfloor \text{ (onde } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ e } \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1\text{)}$$

$10^{2 \cdot 10^6} \cdot K = \lfloor 10^{3 \cdot 10^6} \sqrt{2} \rfloor \Rightarrow$ (onde $K = \lfloor 10^{10^6} \sqrt{2} \rfloor$) $\Rightarrow 10^{2 \cdot 10^6} K \leq 10^{3 \cdot 10^6} \sqrt{2} < 10^{2 \cdot 10^6} K + 1$, mas como $10^{2 \cdot 10^6} K \neq 10^{3 \cdot 10^6} \sqrt{2}$, (pois se não fosse teríamos $\sqrt{2} = K / 10^{10^6}$, um absurdo, pois $\sqrt{2}$ é irracional!) então:

$$10^{2 \cdot 10^6} K < 10^{3 \cdot 10^6} \sqrt{2} < 10^{2 \cdot 10^6} K + 1 \Rightarrow \frac{K}{10^{10^6}} < \sqrt{2} < \frac{K}{10^{10^6}} + \frac{1}{10^{3 \cdot 10^6}} \Rightarrow$$

$$\frac{K^2}{10^{2 \cdot 10^6}} < 2 < \frac{K^2}{10^{2 \cdot 10^6}} + \frac{2K}{10^{4 \cdot 10^6}} + \frac{1}{10^{6 \cdot 10^6}} \Rightarrow K^2 < 2 \cdot 10^{2 \cdot 10^6} < K^2 + \frac{2K}{10^{2 \cdot 10^6}} + \frac{1}{10^{4 \cdot 10^6}},$$

mas como $K = \lfloor 10^{10^6} \sqrt{2} \rfloor \in \mathbb{Z}$, temos (pela definição de $\lfloor x \rfloor$):

$$K \leq 10^{10^6} \sqrt{2} < K + 1 \Rightarrow \frac{K}{10^{10^6}} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{K}{10^{2 \cdot 10^6}} \leq \frac{\sqrt{2}}{10^{10^6}} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2K}{10^{2 \cdot 10^6}} \leq \frac{1}{2}, \text{ logo:}$$

$$K^2 < 2 \cdot 10^{2 \cdot 10^6} < K^2 + \frac{2K}{10^{2 \cdot 10^6}} + \frac{1}{10^{4 \cdot 10^6}} < K^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10^{4 \cdot 10^6}} < K^2 + 1 \Rightarrow$$

$K^2 < 2 \cdot 10^{2 \cdot 10^6} < K^2 + 1 \Rightarrow 0 < 2 \cdot 10^{2 \cdot 10^6} - K^2 < 1$, um absurdo, pois não existe nenhum inteiro maior que 0 e menor que 1, disto concluímos que há um algarismo diferente de 0 nestas casas decimais. (Poderíamos ter uma aproximação melhor pois $2K$ é bem menor que $10^{2 \cdot 10^6}$).

Obs: $\lfloor x \rfloor$ denota a função do "maior inteiro".

PROBLEMA 3 SOLUÇÃO DA BANCA

O problema é equivalente a encontrar subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_{10} de $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ cuja soma do número de elementos seja a maior possível tais que a interseção de dois quaisquer deles tenha no máximo um elemento (A_i é o conjunto das posições das peças na i -ésima linha do tabuleiro).

Se A_i tem k_i elementos então há $C_{k_i}^2 = \frac{k_i(k_i - 1)}{2}$ subconjuntos de 2 elementos não pode pertencer a dois dos conjuntos A_i , e há no total $C_{10}^2 = 45$ subconjuntos de 2 elementos de $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Assim, devemos ter $\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i - 1)}{2} \leq 45$.

Por outro lado, se existem i, j com $k_j > k_i + 1$, temos

$$C_{k_i+1}^2 + C_{k_j-1}^2 = \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{(k_j-1)(k_j-2)}{2} = \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{k_j(k_j-1)}{2} + k_i + 1 - k_j < C_{k_i}^2 + C_{k_j}^2.$$

Assim para minimizar $\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i - 1)}{2}$ mantendo $\sum_{i=1}^{10} k_i$ fixo devemos ter $|k_i - k_j| \leq 1$ para todo

i, j . Se observamos que $5C_4^2 + 5C_3^2 = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 45$, concluímos que se

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i - 1)}{2} \leq 45 \text{ então } \sum_{i=1}^{10} k_i \leq 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 35, \text{ valendo a igualdade se e só se 5 dos } k_i \text{ são}$$

iguais a 4 e os outros 5 iguais a 3. Para que a construção seja possível nesse caso precisamos de que cada par de elementos apareça em exatamente um dos conjuntos A_i . Nesse caso, cada elemento de $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ deve aparecer em 3 conjuntos com 4 elementos ou em um conjunto com 4 elementos e 2 conjuntos com 3 elementos (pois cada um dos outros 9 elementos aparece exatamente uma vez junto com ele). Como haveria 5 conjuntos com 4 elementos, o número médio de conjuntos com 4 elementos aos quais cada elemento pertence é 2, donde há elementos que pertencem a 3 conjuntos com 4 elementos (pois um elemento não pode pertencer a exatamente 2 conjuntos com 4 elementos). Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 5, 6, 7\}$ e $A_3 = \{1, 8, 9, 10\}$, mais então qualquer outro conjunto de 4 elementos deve estar contido em $\{2, 3, \dots, 10\}$, e portanto deve intersectar um dos conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 , em

pelo menos 2 elementos. Assim, não é possível que $\sum_{i=1}^{10} k_i$ seja igual a 35. Por outro lado é

possível construir exemplos com $\sum_{i=1}^{10} k_i = 34$, como abaixo:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, A_2 = \{1, 5, 6, 7\}, A_3 = \{2, 5, 8, 9\}, A_4 = \{3, 6, 8, 10\}, A_5 = \{1, 9, 10\},$$

$$A_6 = \{2, 7, 10\}, A_7 = \{3, 7, 9\}, A_8 = \{4, 5, 10\}, A_9 = \{4, 6, 9\} \text{ e } A_{10} = \{4, 7, 8\}.$$

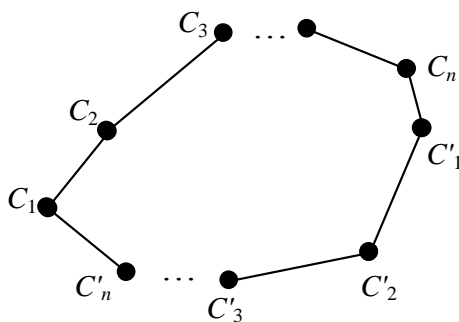
•	•	•	•						
•				•	•	•			
	•			•			•	•	
		•			•		•		•
•								•	•
	•					•			•
		•				•		•	
			•	•					•
			•		•			•	
			•			•	•		

PROBLEMA 4

SOLUÇÃO DE GILBERTO SANTOS DO NASCIMENTO (São Paulo - SP)

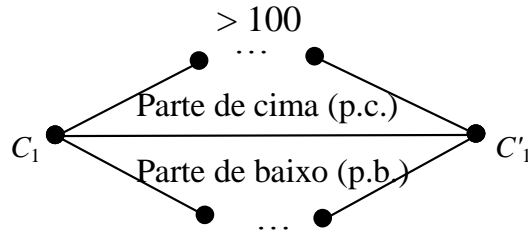
Seja C'_1 o antípoda de C_1 .

Vamos ligar C_1 a C'_1 e vice-versa, formando uma linha fechada. Abaixo C'_j é o antípoda de C_j para todo j .

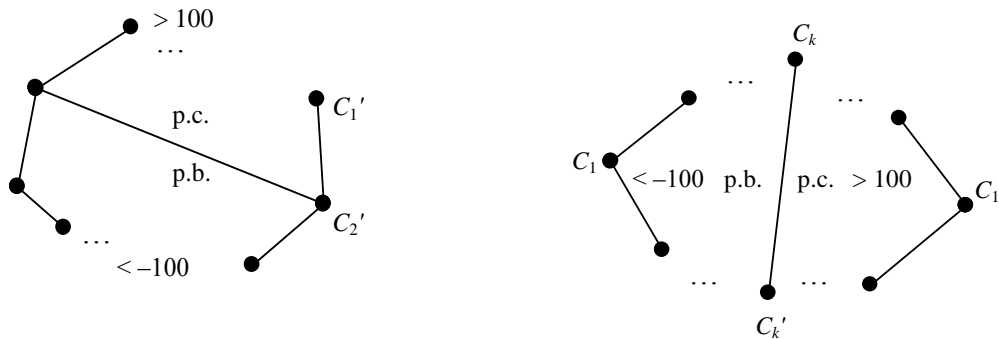


Agora, supondo que a diferença da Kryptonita de C'_1 para C_1 seja maior que 100. Então, vamos supor que $(C_2 - C_1) + (C_3 - C_2) + \dots + (C'_1 - C_n) > 100$. Como ao percorrer o caminho, temos de ter uma diferença zero ao chegarmos em C_1 novamente, somando $(C'_2 - C'_1) + (C'_3 - C'_2) + \dots + (C_1 - C'_n) < -100$.

Agora, supondo que o **Superman** trace uma linha de C_1 a C'_1 (esta linha não poderia ser uma estrada, pois $|C'_1 - C_1| > 100$) a soma das diferenças na parte de cima da linha deve ser maior que 100 e embaixo menor que -100 .



Agora, supondo que esta linha percorra a figura, ligando todas as cidades antípodas, na parte de cima, a soma deve continuar sendo maior que 100 e embaixo menor que 100. Em p.c. (parte de cima), a soma não pode passar bruscamente de > 100 para < -100 , pois são somadas apenas duas diferenças de cada vez (menores que 200 no total!). Assim, para que p.c. fique negativo < -100 e p.b. fique positivo > 100 , teríamos de ter duas cidades antípodas com diferença < 100 em módulo.



Continuando o percurso, ao chegarmos em C_1' , teremos de ligá-lo a C_1 . No entanto, p.c. estará em baixo e a soma das diferenças na direção de C_1' para C_1 terá de ser positivo > 100 . Mas essa soma era negativa e < -100 quando começamos ($\Rightarrow \Leftarrow$) Contradição.

O mesmo ocorre analogamente com p.b. Logo, em algum par de cidades (uma cidade e sua antípoda), a diferença do preço da Kriptonita deverá ser menor ou igual a 100.

Viva o **Superman!**

PROBLEMA 4

SOLUÇÃO ALTERNATIVA DE HUMBERTO SILVA NAVES (Goiânia - GO)

Suponhamos, por absurdo, que os preços diferem por mais de 100 Urghs em todas as cidades antípodas, então:

$$|x_0 - y_0| > 100 \Rightarrow M_0 - m_0 > 100 \text{ (onde } x_n \text{ e } y_n \text{ são antípodas e representam o preço da Kriptonita).}$$

$$|x_1 - y_1| > 100 \Rightarrow M_1 - m_1 > 100$$

$$|x_n - y_n| > 100 \Rightarrow M_n - m_n > 100 \text{ (Onde } M_n = \max(x_n, y_n) \text{ e } m_n = \min(x_n, y_n))$$

Como sabemos que existe um caminho de estradas que leva de M_0 até m_0 , então deve existir uma estrada que liga (para certo $i, j \in \mathbb{N}; i, j \leq n$) $M_i \leftrightarrow m_j$.

Como existe uma estrada ligando $M_i \leftrightarrow m_j$, também existe uma estrada ligando $m_j \leftrightarrow M_i$ (antípodas). Pode acontecer $i = j$, caso em que se conclui facilmente que $M_i - m_i > 100$, um absurdo pois m_i e M_i são "vizinhas", logo o preço da Kriptonita difere por no máximo 100 Urghs.

Se $i = j$, então:

$$|M_j - m_j| \leq 100 \text{ (são "vizinhas")}$$

$|M_i - m_j| \leq 100$, mas como

$M_i - m_i > 100$ e $M_j - m_j > 100$, então:

$M_i + M_j - m_i - m_j > 200$

$M_i - m_j + M_j - m_i > 200 \Rightarrow |M_i - m_j + M_j - m_i| > 200 \Rightarrow |M_i - m_j| + |M_j - m_i| > 200 \Rightarrow 200 \geq$

$\geq |M_i - m_j| + |M_j - m_i| > 200$, um absurdo, logo existem cidades antípodas cujo preço difere no máximo em 100 Urghs.

PROBLEMA 5

SOLUÇÃO DE FABRÍCIO SIQUEIRA BENEVIDES (Fortaleza - CE)

Façamos 2 casos, n par e n ímpar.

i) n par.

Cada time tem que jogar com cada um dos outros. Se os times são: T_1, T_2, \dots, T_n ; temos que um time T_i tem que jogar $(n - 1)$ vezes e para isso precisará de pelo menos $(n - 1)$ domingos. (pois só pode jogar 1 vez por domingo). Mostraremos que é possível realizar o campeonato em $(n - 1)$ domingos. Para isso basta que o jogo entre T_i e T_j ($i \neq j$) ocorra no seguinte domingo.

- 1) $d_{ij} \equiv i + j \pmod{n - 1}$, $1 \leq d_{ij} \leq n - 1$ para $\forall i \neq n, j \neq n$
- 2) $d_{in} \equiv 2i \pmod{n - 1}$, $1 \leq d_{in} \leq n - 1$ para todo $i \neq n, j \neq n$
(se um dos times for T_n).

Podemos observar isso numa tabela que indique o dia entre T_i e T_j

Exemplo: para $n = 6$

d_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_1		3	4	5	1	2
T_2	3		5	1	2	4
T_3	4	5		2	3	1
T_4	5	1	2		4	3
T_5	1	2	3	4		5
T_6	2	3	4	5	1	

O campeonato organizado assim satisfaz o problema pois: é fácil ver que um time I joga com cada um dos outros times (no domingo d_{ij} , $j \neq i$). E cada time só joga uma vez num mesmo dia, caso contrário teríamos: um time T_i que joga contra T_j e T_k no mesmo domingo, ou seja $d_{ij} = d_{ki}$

- 1) Se $i = n$: $d_{jn} = d_{kn} \therefore 2j \equiv 2k \pmod{n - 1}$ como $(2, n - 1) = 1$ teríamos $j \equiv k \pmod{n - 1}$, $\{j, k\} \subset \{1, 2, \dots, n - 1\} \therefore j = k$, uma contradição.
- 2) Se $i \neq n$.
 - 2.1) j e $k \neq n$: $d_{ik} = d_{ij} \therefore i + k \equiv i + j \pmod{n - 1} \therefore j \equiv k \pmod{n - 1}$ e $k = j$. uma contradição.
 - 2.2) $j = n, k \neq n$ sem perda de generalidade: $d_{in} = d_{ik} \therefore i + i \equiv i + k \pmod{n - 1}$
 - 2.3) $i \equiv k \pmod{n - 1}$ $\{i, j\} \leq \{1, 2, \dots, n - 1\} \Rightarrow i = j$ uma contradição.

Agora se n for ímpar, como cada time tem que jogar com todos os outros seria necessário pelo menos $(n - 1)$ domingos.

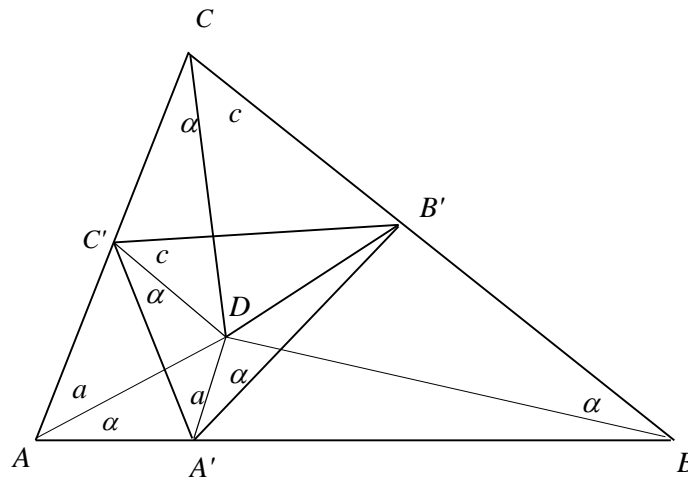
Só que $(n - 1)$ domingos não são suficientes pois em cada dia há um time que fica sem jogar. Assim, se no primeiro dia T_i foi o time que não jogou, ele ainda precisará de mais $(n - 1)$ domingos para jogar contra os outros. De modo que são necessários pelo menos n domingos. n domingos são suficientes, basta que o campeonato se organize assim: Sejam T_1, T_2, \dots, T_n os times. Criamos um time virtual chamado T_{n+1} onde jogar contra T_{n+1} um certo dia, significa não jogar naquele dia.

Temos então $n + 1 = x$ times, organizamos então como no caso anterior o campeonato. Como x é par isso pode ser feito em $x - 1 = n$ dias.

Obs: O exemplo para $(2k - 1)$ times é obtido do de $(2k)$ times esquecendo-se um dos times.

Resposta: Se n é par $m = n - 1$.
Se n é ímpar $m = n$.

PROBLEMA 6
SOLUÇÃO DA BANCA



Sejam $\angle A, \angle B, \angle C$ os ângulos internos do triângulo ABC , sejam $\angle A', \angle B', \angle C'$ os ângulos internos do triângulo $A'B'C'$ e consideremos $\angle A' = \angle A$ e $\angle C' = \angle C$.

Seja D o ponto de interseção das circunferências circunscritas aos triângulos $AA'C'$ e $CC'B'$. Nos quadriláteros inscritíveis $AA'DC'$ e $CC'DB'$ temos $\angle A'DC' = \pi - \angle A$ e $\angle C'DB' = \pi - \angle C$. Logo, $\angle A'DB' = 2\pi - (\pi - \angle A) - (\pi - \angle C) = \pi - \angle B$, e portanto, a circunferência circunscrita ao triângulo $BB'A'$ passa por D .

No quadrilátero inscritível $AA'DC'$, $\angle DAA' = \angle DC'A' = \alpha$ e $\angle DA'C' = \angle DAC' = a$. Como $\angle A = \angle A'$ concluímos que $\angle DA'B' = \alpha$. Logo, no quadrilátero inscritível $BB'DA'$ temos que $\angle DBB' = \alpha$. No quadrilátero inscritível $CC'DB'$ temos que $\angle DCB' = \angle DC'B' = c$, e como $\angle C = \angle C'$ concluímos que $\angle DCC' = \alpha$.

O ponto D está então associado ao triângulo ABC pela propriedade:

$$\angle DAB = \angle DBC = \angle CDA$$

e portanto não depende da posição de A', B' e C' . O ponto D é fixo e sua construção será mostrada no final da solução.

Como os ângulos $A'DB'$, $B'DC'$ e $C'DA'$ são constantes, a menor área possível do triângulo $A'B'C'$ é obtida quando os segmentos DA' , DB' e DC' forem os menores possíveis. Logo, DA' , DB' e DC' são respectivamente perpendiculares aos lados AB , BC e CA .

Construção do ponto D

Seja E a interseção da mediatriz de AB com a perpendicular a BC traçada por B . A circunferência de centro E e raio $EA = EB$ é tangente em B à reta BC . Logo, para qualquer ponto X do menor arco AB tem-se que $\angle XAB = \angle XBC$.

Seja F a interseção da mediatriz de BC com a perpendicular a CA traçada por C . A circunferência de centro F e raio $FB = FC$ é tangente em C à reta CA . Logo, para qualquer ponto X do menor arco BC tem-se que $\angle XBC = \angle XCA$.

O ponto D , interseção desses dois arcos é tal que $\angle DAB = \angle DBC = \angle CDA$.